ИНТЕГРАЛЫ

ДЛЯ ЧАЙНИКОВ

учебное пособие для студентов младших курсов

Автор

Трепачёв Дмитрий

2025 год, v1.0.0

Оглавление

Интеграл от степенной функции

Теория

В этой главе мы научимся брать самый простой интеграл — от степенной функции x^n.

Запомните главную формулу:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{кроме } n = -1$$

Что означают эти знаки?

- $\int$ — знак интеграла (показывает, что мы интегрируем)
- dx — показывает, что переменная, по которой интегрируем, — это x
- C — произвольная постоянная (при дифференцировании она исчезает, поэтому всегда добавляем)
- $n \neq -1$ — потому что при $n = -1$ получается $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx$, а это особая формула (будет в следующей главе)

Как запомнить: по нашей формуле нужно увеличить степень на единицу и разделить на то же число.

Важно! Формула работает для **любых** n: целых положительных, целых отрицательных (кроме -1), дробных — любых.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Целая положительная степень

Вычислите интеграл:

$$\int x^5\,dx$$

По формуле увеличиваем степень на 1 и делим на 6:

$$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$$

Пример 2

Степень 1 (просто икс)

Вычислите интеграл:

$$\int x\,dx$$

Здесь x — это x^1. По формуле увеличиваем степень на 1 и делим на 2:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Пример 3

Отрицательная степень

Вычислите интеграл:

$$\int x^{-4}\,dx$$

По формуле увеличиваем степень на 1 и делим на -3:

$$\int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$$

Пример 4

Дробная степень (корень)

Вычислите интеграл:

$$\int \sqrt{x}\, dx$$

Преобразуем корень в степень: $\sqrt{x} = x^{1/2}$. По формуле увеличиваем степень на 1 и делим на $\frac{3}{2}$ (то есть умножаем на $\frac{2}{3}$):

$$\int x^{1/2}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

Обычно ответ записывают так:

$$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

Пример 5

Единица в числителе

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{x^3}\, dx$$

Преобразуем дробь в степень: $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$. По формуле увеличиваем степень на 1 и делим на -2:

$$\int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

Пример 6

Корень в знаменателе

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Преобразуем в степень: $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$. По формуле увеличиваем степень на 1 и делим на $\frac{1}{2}$ (то есть умножаем на 2):

$$\int x^{-1/2}\, dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$

Пример 7

Важное предупреждение

Формула $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ работает для всех n, **кроме** $n = -1$.

Почему? При $n = -1$ получается $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx$. Если подставить в формулу, в знаменателе будет 0:

$$\int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0} + C$$

А на ноль делить нельзя! Поэтому для $\frac{1}{x}$ своя отдельная формула:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

Эту формулу разберём в следующей главе.

Задачи

1. Вычислите интегралы:

1) $\int x^2\,dx$

2) $\int x^3\,dx$

3) $\int x^4\,dx$

4) $\int x^6\,dx$

5) $\int x^7\,dx$

6) $\int x^8\,dx$

7) $\int x^9\,dx$

8) $\int x^{10}\,dx$

9) $\int x^{15}\,dx$

10) $\int x^{20}\,dx$

11) $\int x^{25}\,dx$

12) $\int x^{30}\,dx$

2. Вычислите интегралы:

1) $\int x\,dx$

2) $\int x^1\,dx$

3) $\int 1\,dx$

4) $\int 5\,dx$

5) $\int 10\,dx$

6) $\int 100\,dx$

3. Вычислите интегралы:

1) $\int x^{-2}\,dx$

2) $\int x^{-3}\,dx$

3) $\int x^{-4}\,dx$

4) $\int x^{-5}\,dx$

5) $\int x^{-6}\,dx$

6) $\int x^{-7}\,dx$

7) $\int x^{-8}\,dx$

8) $\int x^{-9}\,dx$

9) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

10) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

11) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$

12) $\int \frac{1}{x^5}\,dx$

4. Вычислите интегралы:

1) $\int \sqrt{x}\,dx$

2) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

3) $\int \sqrt[4]{x}\,dx$

4) $\int \sqrt[5]{x}\,dx$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

6) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

7) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

8) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$

9) $\int x^{2/3}\,dx$

10) $\int x^{3/4}\,dx$

11) $\int x^{5/2}\,dx$

12) $\int x^{-2/3}\,dx$

5. Вычислите интегралы:

1) $\int x^{0.5}\,dx$

2) $\int x^{1.5}\,dx$

3) $\int x^{-0.5}\,dx$

4) $\int x^{-1.5}\,dx$

5) $\int x^{0.2}\,dx$

6) $\int x^{0.3}\,dx$

7) $\int x^{-0.3}\,dx$

8) $\int x^{-0.7}\,dx$

Особый случай: интеграл от 1/x

Теория

В прошлой главе мы научились брать интеграл от x^n для любого n, кроме одного — $n = -1$. Этот случай особенный, и для него нужна отдельная формула.

Запомните формулу:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Что означают эти знаки?

- $\ln$ — натуральный логарифм (логарифм по основанию e)
- Модуль $|x|$ — потому что логарифм определён только для положительных чисел, а x может быть отрицательным
- C — произвольная постоянная

Почему модуль? Проверим дифференцированием. Производная от $\ln|x|$ равна $\frac{1}{x}$ для любого $x \neq 0$:

- При $x > 0$: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- При $x < 0$: $\ln|x| = \ln(-x)$, производная: $\frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

Важно! Эта формула — одна из самых используемых в интегральном исчислении. Запомните её раз и навсегда.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Самый простой случай

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{x}\,dx$$

По формуле получаем:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Пример 2

Двойка в числителе

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{2}{x}\,dx$$

Двойку можно вынести за знак интеграла:

$$\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx = 2\ln|x| + C$$

Пример 3

Минус в числителе

Вычислите интеграл:

$$\int -\frac{5}{x}\,dx$$

Выносим минус и пятёрку:

$$\int -\frac{5}{x}\,dx = -5\int \frac{1}{x}\,dx = -5\ln|x| + C$$

Пример 4

Икс в знаменателе с коэффициентом

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{2x}\,dx$$

Представим как $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$ и вынесем $\frac{1}{2}$:

$$\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

Пример 5

Другой коэффициент

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{3x}$$

Аналогично:

$$\int \frac{dx}{3x} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\ln|x| + C$$

Пример 6

Комбинация с числителем и знаменателем

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{5}{2x}\,dx$$

Выносим всё, что можно:

$$\int \frac{5}{2x}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{5}{2}\ln|x| + C$$

Пример 7

Важное предупреждение

Частая ошибка: путают $\int \frac{1}{2x}dx$ с $\int \frac{1}{2x}d(2x)$. Запомните:

$$\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

а

$$\int \frac{1}{2x}\,d(2x) = \ln|2x| + C$$

Это разные вещи! Пока мы работаем только с первым вариантом.

Пример 8

Проверка дифференцированием

Проверим пример 4. Возьмём производную от $\frac{1}{2}\ln|x| + C$:

$$\left(\frac{1}{2}\ln|x|\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы:

1) $\int \frac{1}{x}\,dx$ 3) $\int \frac{2}{x}\,dx$ 5) $\int \frac{5}{x}\,dx$ 7) $\int \frac{10}{x}\,dx$

2) $\int \frac{dx}{x}$ 4) $\int \frac{3}{x}\,dx$ 6) $\int \frac{7}{x}\,dx$ 8) $\int \frac{100}{x}\,dx$

2. Вычислите интегралы:

1) $\int -\frac{1}{x}\,dx$ 3) $\int -\frac{3}{x}\,dx$ 5) $\int -\frac{10}{x}\,dx$ 7) $\int \frac{-100}{x}\,dx$

2) $\int -\frac{2}{x}\,dx$ 4) $\int -\frac{5}{x}\,dx$ 6) $\int \frac{-7}{x}\,dx$ 8) $\int -\frac{dx}{x}$

3. Вычислите интегралы:

1) $\int \frac{1}{2x}\,dx$ 4) $\int \frac{1}{5x}\,dx$ 7) $\int \frac{1}{8x}\,dx$ 10) $\int \frac{dx}{2x}$

2) $\int \frac{1}{3x}\,dx$ 5) $\int \frac{1}{6x}\,dx$ 8) $\int \frac{1}{9x}\,dx$ 11) $\int \frac{dx}{3x}$

3) $\int \frac{1}{4x}\,dx$ 6) $\int \frac{1}{7x}\,dx$ 9) $\int \frac{1}{10x}\,dx$ 12) $\int \frac{dx}{4x}$

4. Вычислите интегралы:

1) $\int \frac{2}{3x}\,dx$ 4) $\int \frac{5}{6x}\,dx$ 7) $\int \frac{9}{4x}\,dx$ 10) $\int \frac{3}{8x}\,dx$

2) $\int \frac{3}{4x}\,dx$ 5) $\int \frac{7}{2x}\,dx$ 8) $\int \frac{10}{7x}\,dx$ 11) $\int \frac{5}{12x}\,dx$

3) $\int \frac{4}{5x}\,dx$ 6) $\int \frac{8}{3x}\,dx$ 9) $\int \frac{2}{5x}\,dx$ 12) $\int \frac{7}{15x}\,dx$

5. Вычислите интегралы:

1) $\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx$ 3) $\int \frac{1}{2x}\,dx + \int \frac{1}{3x}\,dx$ 5) $\int \frac{5}{x}\,dx - \int \frac{3}{x}\,dx$ $\int \frac{1}{3x}\,dx$

2) $\int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$ 4) $\int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{1}{2x}\,dx$ 6) $\int \frac{1}{x}\,dx \ + \int \frac{1}{2x}\,dx \ +$

Интеграл от показательной функции

Теория

В этой главе мы научимся брать интегралы от показательных функций — a^x и e^x.

Запомните главную формулу:

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

Что означают эти знаки?

- a — основание степени (положительное число, не равное 1)
- $\ln a$ — натуральный логарифм числа a
- C — произвольная постоянная

Особый случай (основание e):

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Почему? Потому что $\ln e = 1$, и формула превращается в $\frac{e^x}{1} = e^x$.

Как запомнить: интеграл от показательной функции равен самой функции, делённой на натуральный логарифм основания.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Основание 2

Вычислите интеграл:

$$\int 2^x\,dx$$

По формуле $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ с $a = 2$:

$$\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

Пример 2

Основание 3

Вычислите интеграл:

$$\int 3^x\,dx$$

Аналогично:

$$\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

Пример 3

Основание 10

Вычислите интеграл:

$$\int 10^x\,dx$$

По формуле:

$$\int 10^x\,dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$$

Пример 4

Основание меньше 1

Вычислите интеграл:

$$\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$$

Здесь $a = \frac{1}{2}$. Подставляем в формулу:

$$\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{(1/2)^x}{\ln(1/2)} + C$$

Заметим, что $\ln(1/2) = -\ln 2$, поэтому ответ можно записать и так:

$$\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = -\frac{(1/2)^x}{\ln 2} + C$$

Пример 5

Основание e

Вычислите интеграл:

$$\int e^x\, dx$$

Это частный случай формулы при $a = e$. Так как $\ln e = 1$:

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

Пример 6

Коэффициент перед функцией

Вычислите интеграл:

$$\int 5 \cdot 2^x\, dx$$

Константу можно вынести за знак интеграла:

$$\int 5 \cdot 2^x\, dx = 5 \int 2^x\, dx = 5 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{5 \cdot 2^x}{\ln 2} + C$$

Пример 7

Сумма показательных функций

Вычислите интеграл:

$$\int (2^x + 3^x)\, dx$$

Интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int (2^x + 3^x)\, dx = \int 2^x\, dx + \int 3^x\, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

Пример 8

Проверка дифференцированием

Проверим пример 1. Берём производную от $\frac{2^x}{\ln 2} + C$:

$$\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)' = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x \cdot \ln 2 = 2^x$$

Всё верно!

Проверим пример 5. Производная от $e^x + C$ равна e^x — тоже верно.

Задачи

1. Вычислите интегралы:

1) $\int 2^x\,dx$ **4)** $\int 5^x\,dx$ **7)** $\int 8^x\,dx$ **10)** $\int 15^x\,dx$

2) $\int 3^x\,dx$ **5)** $\int 6^x\,dx$ **8)** $\int 9^x\,dx$ **11)** $\int 20^x\,dx$

3) $\int 4^x\,dx$ **6)** $\int 7^x\,dx$ **9)** $\int 10^x\,dx$ **12)** $\int 30^x\,dx$

2. Вычислите интегралы:

1) $\int e^x\,dx$ **3)** $\int 2e^x\,dx$ **5)** $\int 5e^x\,dx$ **7)** $\int -e^x\,dx$

2) $\int e^x\,dx$ **4)** $\int 3e^x\,dx$ **6)** $\int 10e^x\,dx$ **8)** $\int -5e^x\,dx$

3. Вычислите интегралы (основания меньше 1):

1) $\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$ **4)** $\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx$ **7)** $\int \left(\frac{1}{8}\right)^x dx$ **10)** $\int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx$

2) $\int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx$ **5)** $\int \left(\frac{1}{6}\right)^x dx$ **8)** $\int \left(\frac{1}{9}\right)^x dx$ **11)** $\int \left(\frac{3}{4}\right)^x dx$

3) $\int \left(\frac{1}{4}\right)^x dx$ **6)** $\int \left(\frac{1}{7}\right)^x dx$ **9)** $\int \left(\frac{1}{10}\right)^x dx$ **12)** $\int \left(\frac{4}{5}\right)^x dx$

4. Вычислите интегралы (с коэффициентами):

1) $\int 3\cdot 2^x\,dx$ **4)** $\int 2\cdot 5^x\,dx$ **7)** $\int 2\cdot e^x\,dx$ **10)** $\int -3\cdot 2^x\,dx$

2) $\int 4\cdot 3^x\,dx$ **5)** $\int 10\cdot 2^x\,dx$ **8)** $\int 5\cdot e^x\,dx$ **11)** $\int -4\cdot e^x\,dx$

3) $\int 5\cdot 4^x\,dx$ **6)** $\int 7\cdot 3^x\,dx$ **9)** $\int 10\cdot e^x\,dx$ **12)** $\int -2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x dx$

5. Вычислите интегралы (суммы):

1) $\int (2^x+3^x)\,dx$ **4)** $\int (3^x+4^x)\,dx$ **7)** $\int (5\cdot 2^x-2\cdot e^x)\,dx$

2) $\int (2^x-3^x)\,dx$ **5)** $\int (2^x+3^x+4^x)\,dx$ **8)** $\int \left(2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) dx$

3) $\int (2^x+e^x)\,dx$ **6)** $\int (2\cdot 2^x+3\cdot 3^x)\,dx$ **9)** $\int \left(3^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x\right) dx$

Интегралы от синуса и косинуса

Теория

В этой главе мы научимся брать интегралы от основных тригонометрических функций — синуса и косинуса.

Запомните формулы:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Что означают эти знаки?

- $\sin x$ — синус икса
- $\cos x$ — косинус икса
- C — произвольная постоянная

Как запомнить:

- Интеграл от синуса даёт минус косинус
- Интеграл от косинуса даёт синус

Проверим дифференцированием:

- $(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$ — верно
- $(\sin x)' = \cos x$ — верно

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Интеграл от синуса

Вычислите интеграл:

$$\int \sin x \, dx$$

По формуле:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

Пример 2

Интеграл от косинуса

Вычислите интеграл:

$$\int \cos x \, dx$$

По формуле:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Пример 3

Коэффициент перед синусом

Вычислите интеграл:

$$\int 3 \sin x \, dx$$

Константу выносим за знак интеграла:

$$\int 3 \sin x \, dx = 3 \int \sin x \, dx = 3(-\cos x) + C = -3 \cos x + C$$

Пример 4

Коэффициент перед косинусом

Вычислите интеграл:

$$\int 5\cos x\,dx$$

Аналогично:

$$\int 5\cos x\,dx = 5\int \cos x\,dx = 5\sin x + C$$

Пример 5

Минус перед функцией

Вычислите интеграл:

$$\int -\sin x\,dx$$

Выносим минус:

$$\int -\sin x\,dx = -\int \sin x\,dx = -(-\cos x) + C = \cos x + C$$

Пример 6

Сумма синуса и косинуса

Вычислите интеграл:

$$\int (\sin x + \cos x)\,dx$$

Интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx = -\cos x + \sin x + C$$

Пример 7

Разность

Вычислите интеграл:

$$\int (2\sin x - 3\cos x)\,dx$$

Раскладываем на сумму интегралов и выносим коэффициенты:

$$\int 2\sin x\,dx - \int 3\cos x\,dx = 2(-\cos x) - 3\sin x + C = -2\cos x - 3\sin x + C$$

Пример 8

Комбинация с числами

Вычислите интеграл:

$$\int (5\sin x + 4)\,dx$$

Здесь 4 — это константа, её интеграл равен $4x$ (по формуле из главы 1):

$$\int 5\sin x\,dx + \int 4\,dx = -5\cos x + 4x + C$$

Задачи

1. Вычислите интегралы:

1) $\int \sin x\,dx$ 3) $\int \sin x\,dx$ 5) $\int 2\sin x\,dx$ 7) $\int 4\sin x\,dx$

2) $\int \cos x\,dx$ 4) $\int \cos x\,dx$ 6) $\int 3\cos x\,dx$ 8) $\int 5\cos x\,dx$

2. Вычислите интегралы:

1) $\int -\sin x\,dx$ 3) $\int -2\sin x\,dx$ 5) $\int -5\sin x\,dx$ 7) $\int \sin(-x)\,dx$ (позже)

2) $\int -\cos x\,dx$ 4) $\int -3\cos x\,dx$ 6) $\int -7\cos x\,dx$ 8) $\int \cos(-x)\,dx$ (позже)

3. Вычислите интегралы:

1) $\int (\sin x + \cos x)\,dx$ 3) $\int (2\sin x + 3\cos x)\,dx$ 5) $\int (5\sin x + 2\cos x)\,dx$ 7) $\int (\sin x + \sin x)\,dx$

2) $\int (\sin x - \cos x)\,dx$ 4) $\int (4\sin x - 5\cos x)\,dx$ 6) $\int (3\sin x - 7\cos x)\,dx$ 8) $\int (\cos x - \cos x)\,dx$

4. Вычислите интегралы (с константами):

1) $\int (\sin x + 1)\,dx$ 3) $\int (2\sin x + 3)\,dx$ 5) $\int (5\sin x - 2)\,dx$ 7) $\int (\sin x + \cos x + 1)\,dx$

2) $\int (\cos x + 2)\,dx$ 4) $\int (3\cos x + 4)\,dx$ 6) $\int (4\cos x - 5)\,dx$ 8) $\int (2\sin x - 3\cos x + 4)\,dx$

5. Вычислите интегралы (смешанные с предыдущими темами):

1) $\int (\sin x + x^2)\,dx$ 4) $\int (3\cos x + 2^x)\,dx$ 7) $\int (\sin x + \frac{1}{x} + e^x)\,dx$

2) $\int (\cos x + x^3)\,dx$ 5) $\int (\sin x + \cos x + x)\,dx$ 8) $\int (\cos x + 2^x - \frac{1}{x})\,dx$

3) $\int (2\sin x + \frac{1}{x})\,dx$ 6) $\int (5\sin x - 2\cos x + 3^x)\,dx$ 9) $\int (2\sin x + 3\cos x + 4x^2)\,dx$

Интегралы от тангенса и котангенса

Теория

В этой главе мы научимся брать интегралы от функций, которые связаны с синусом и косинусом, — от $\frac{1}{\cos^2 x}$ и $\frac{1}{\sin^2 x}$. Именно они дают тангенс и котангенс.

Запомните формулы:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

Что означают эти знаки?

- $\operatorname{tg} x$ — тангенс икса ($\frac{\sin x}{\cos x}$)
- $\operatorname{ctg} x$ — котангенс икса ($\frac{\cos x}{\sin x}$)
- C — произвольная постоянная

Как запомнить:

- Производная тангенса равна $\frac{1}{\cos^2 x}$, значит интеграл от $\frac{1}{\cos^2 x}$ даёт тангенс
- Производная котангенса равна $-\frac{1}{\sin^2 x}$, значит интеграл от $\frac{1}{\sin^2 x}$ даёт минус котангенс

Проверим дифференцированием:

- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ — верно
- $(-\operatorname{ctg} x)' = -(-\frac{1}{\sin^2 x}) = \frac{1}{\sin^2 x}$ — верно

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

На косинус

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

По формуле:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

Пример 2

На синус

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

По формуле:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

Пример 3

Коэффициент перед функцией

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{5}{\cos^2 x}\,dx$$

Константу выносим за знак интеграла:

$$\int \frac{5}{\cos^2 x}\,dx = 5\int \frac{dx}{\cos^2 x} = 5\operatorname{tg} x + C$$

Пример 4

Коэффициент перед обратным синусом

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{3}{\sin^2 x}\,dx$$

Аналогично:

$$\int \frac{3}{\sin^2 x}\,dx = 3\int \frac{dx}{\sin^2 x} = 3(-\operatorname{ctg} x) + C = -3\operatorname{ctg} x + C$$

Пример 5

Минус перед функцией

Вычислите интеграл:

$$\int -\frac{2}{\cos^2 x}\,dx$$

Выносим минус:

$$\int -\frac{2}{\cos^2 x}\,dx = -2\int \frac{dx}{\cos^2 x} = -2\operatorname{tg} x + C$$

Пример 6

Сумма

Вычислите интеграл:

$$\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$$

Раскладываем на сумму интегралов:

$$\int \frac{2}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{3}{\sin^2 x}\,dx = 2\operatorname{tg} x + 3(-\operatorname{ctg} x) + C = 2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x + C$$

Пример 7

Разность

Вычислите интеграл:

$$\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$$

Аналогично:

$$\int \frac{4}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{5}{\sin^2 x}\,dx = 4\operatorname{tg} x - 5(-\operatorname{ctg} x) + C = 4\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} x + C$$

Пример 8

Комбинация с числами

Вычислите интеграл:

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\right)dx$$

Интеграл от константы 2 равен $2x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int 2\,dx = \operatorname{tg} x + 2x + C$$

Задачи

1. Вычислите интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 3) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 5) $\int \frac{2}{\cos^2 x}\,dx$ 7) $\int \frac{4}{\cos^2 x}\,dx$

2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ 4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ 6) $\int \frac{3}{\sin^2 x}\,dx$ 8) $\int \frac{5}{\sin^2 x}\,dx$

2. Вычислите интегралы:

1) $\int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx$ 3) $\int \frac{1}{4\cos^2 x}\,dx$ 5) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x}$ 7) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x}$

2) $\int \frac{1}{3\sin^2 x}\,dx$ 4) $\int \frac{1}{5\sin^2 x}\,dx$ 6) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x}$ 8) $\int \frac{dx}{5\sin^2 x}$

3. Вычислите интегралы (с минусами):

1) $\int -\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ 3) $\int -\frac{2}{\cos^2 x}\,dx$ 5) $\int -\frac{4}{\cos^2 x}\,dx$ 7) $\int -\frac{dx}{2\cos^2 x}$

2) $\int -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx$ 4) $\int -\frac{3}{\sin^2 x}\,dx$ 6) $\int -\frac{5}{\sin^2 x}\,dx$ 8) $\int -\frac{dx}{3\sin^2 x}$

4. Вычислите интегралы (суммы и разности):

1) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$ 4) $\int \left(\frac{1}{2\cos^2 x}+\frac{1}{3\sin^2 x}\right)dx$ 7) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 x}+3\right)dx$

2) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$ 5) $\int \left(\frac{2}{3\cos^2 x}-\frac{3}{4\sin^2 x}\right)dx$ 8) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}-4\right)dx$

3) $\int \left(\frac{4}{\cos^2 x}-\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$ 6) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$ 9) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 x}+5\right)dx$

5. Вычислите интегралы (смешанные с предыдущими темами):

1) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x\right)dx$ 4) $\int \left(\frac{4}{\sin^2 x}+5\cos x\right)dx$ 7) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x}+\sin x+\cos x\right)dx$

2) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}+\cos x\right)dx$ 5) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{x}\right)dx$ 8) $\int \left(\frac{2}{\sin^2 x}+e^x-\frac{1}{x}\right)dx$

3) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x}-3\sin x\right)dx$ 6) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}+2^x\right)dx$ 9) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x}-4\sin x+3x^2\right)dx$

Интегралы от обратных тригонометрических функций

Теория

В этой главе мы научимся брать интегралы от функций, которые дают арксинус и арктангенс.

Запомните формулы:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

Что означают эти знаки?

- $\arcsin x$ — арксинус икса (угол, синус которого равен x)
- $\operatorname{arctg} x$ — арктангенс икса (угол, тангенс которого равен x)
- C — произвольная постоянная

Как запомнить:

- Производная арксинуса равна $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ — значит интеграл от $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ даёт арксинус
- Производная арктангенса равна $\frac{1}{1+x^2}$ — значит интеграл от $\frac{1}{1+x^2}$ даёт арктангенс

Проверим дифференцированием:

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ — верно
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ — верно

Важно! В формуле для арксинуса под корнем стоит $1-x^2$, и x должен быть по модулю меньше 1 (чтобы корень извлекался). Но в неопределённом интеграле мы просто записываем ответ с арксинусом, считая что x лежит в области определения.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Интеграл от $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

По формуле:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

Пример 2

Интеграл от $\frac{1}{1+x^2}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

По формуле:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

Пример 3

Коэффициент перед функцией (арксинус)

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Константу выносим за знак интеграла:

$$\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 5\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 5\arcsin x + C$$

Пример 4

Коэффициент перед функцией (арктангенс)

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{3}{1+x^2}\,dx$$

Аналогично:

$$\int \frac{3}{1+x^2}\,dx = 3\int \frac{dx}{1+x^2} = 3\operatorname{arctg} x + C$$

Пример 5

Минус перед функцией

Вычислите интеграл:

$$\int -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Выносим минус:

$$\int -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2\arcsin x + C$$

Пример 6

Сумма

Вычислите интеграл:

$$\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{1+x^2}\right)dx$$

Раскладываем на сумму интегралов:

$$\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{5}{1+x^2}\,dx = 4\arcsin x + 5\operatorname{arctg} x + C$$

Пример 7

Разность

Вычислите интеграл:

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{1+x^2}\right)dx$$

Аналогично:

$$\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{3}{1+x^2}\,dx = 2\arcsin x - 3\operatorname{arctg} x + C$$

Пример 8

Комбинация с числами

Вычислите интеграл:

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 4\right) dx$$

Интеграл от константы 4 равен $4x$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int 4\,dx = \arcsin x + 4x + C$$

Задачи

1. Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 5) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 7) $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$ 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$ 6) $\displaystyle\int \frac{3}{1+x^2}\,dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{5}{1+x^2}\,dx$

2. Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 5) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}$ 7) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sqrt{1-x^2}}$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{3(1+x^2)}\,dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{1}{5(1+x^2)}\,dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{3(1+x^2)}$ 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{5(1+x^2)}$

3. Вычислите интегралы (с минусами):

1) $\displaystyle\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 3) $\displaystyle\int -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 5) $\displaystyle\int -\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 7) $\displaystyle\int -\frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}$

2) $\displaystyle\int -\frac{1}{1+x^2}\,dx$ 4) $\displaystyle\int -\frac{3}{1+x^2}\,dx$ 6) $\displaystyle\int -\frac{5}{1+x^2}\,dx$ 8) $\displaystyle\int -\frac{dx}{3(1+x^2)}$

4. Вычислите интегралы (суммы и разности):

1) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$ 4) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3(1+x^2)}\right) dx$ 7) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2} + 3\right) dx$

2) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+x^2}\right) dx$ 5) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{3\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{4(1+x^2)}\right) dx$ 8) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} - 4\right) dx$

3) $\displaystyle\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{5}{1+x^2}\right) dx$ 6) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{1+x^2}\right) dx$ 9) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2} + 5\right) dx$

5. Вычислите интегралы (смешанные с предыдущими темами):

1) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin x\right) dx$ 4) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{1+x^2} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$ 7) $\displaystyle\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + \sin x + \cos x\right) dx$

2) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \cos x\right) dx$ 5) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x}\right) dx$ 8) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{1+x^2} + e^x - \frac{1}{x}\right) dx$

3) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$ 6) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{1+x^2} + 2^x\right) dx$ 9) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 3\sin x + 4x^3\right) dx$

Практика по блоку 1

Теория

В этом блоке мы изучили простейшие интегралы:

- Степенная функция: $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (кроме $n = -1$)
- Особый случай: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- Показательная функция: $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x\,dx = e^x + C$
- Синус и косинус: $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- Тангенс и котангенс: $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
- Обратные тригонометрические: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

Во всех формулах не забываем добавлять C — произвольную постоянную.

В этой главе собраны задачи на все эти типы интегралов вперемешку. Ваша задача — вспомнить нужную формулу и применить её.

Задачи

1. Вычислите интегралы (степенная функция):

1) $\int x^3\,dx$ **4)** $\int x^{-2}\,dx$ **7)** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ **10)** $\int x^{0.3}\,dx$

2) $\int x^5\,dx$ **5)** $\int x^{-4}\,dx$ **8)** $\int x^{2/3}\,dx$ **11)** $\int x^{-0.7}\,dx$

3) $\int x^{10}\,dx$ **6)** $\int \sqrt{x}\,dx$ **9)** $\int x^{-1/2}\,dx$ **12)** $\int x^{\pi}\,dx$

2. Вычислите интегралы (логарифм и показательная):

1) $\int \frac{1}{x}\,dx$ **4)** $\int \frac{dx}{2x}$ **7)** $\int 5^x\,dx$ **10)** $\int \left(\frac{1}{2}\right)^x\,dx$

2) $\int \frac{2}{x}\,dx$ **5)** $\int 2^x\,dx$ **8)** $\int e^x\,dx$ **11)** $\int \left(\frac{2}{3}\right)^x\,dx$

3) $\int \frac{1}{3x}\,dx$ **6)** $\int 3^x\,dx$ **9)** $\int 2e^x\,dx$ **12)** $\int 4\cdot 3^x\,dx$

3. Вычислите интегралы (тригонометрические):

1) $\int \sin x\,dx$ **4)** $\int 3\cos x\,dx$ **7)** $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ **10)** $\int \frac{5}{\sin^2 x}\,dx$

2) $\int \cos x\,dx$ **5)** $\int -5\sin x\,dx$ **8)** $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ **11)** $\int \frac{dx}{2\cos^2 x}$

3) $\int 2\sin x\,dx$ **6)** $\int -7\cos x\,dx$ **9)** $\int \frac{4}{\cos^2 x}\,dx$ **12)** $\int \frac{dx}{3\sin^2 x}$

4. Вычислите интегралы (обратные тригонометрические):

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

5) $\int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}$

7) $\int -\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2) $\int \frac{dx}{1+x^2}$

4) $\int \frac{4}{1+x^2}\,dx$

6) $\int \frac{dx}{3(1+x^2)}$

8) $\int -\frac{6}{1+x^2}\,dx$

5. Вычислите интегралы (суммы и разности):

1) $\int (x^2+x)\,dx$

4) $\int (2\sin x - 3\cos x)\,dx$

7) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

2) $\int (x^3-x^2)\,dx$

5) $\int \left(\frac{1}{x}+2^x\right)dx$

8) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

3) $\int (\sin x+\cos x)\,dx$

6) $\int \left(e^x-\frac{1}{x}\right)dx$

9) $\int \left(2\sin x+\frac{1}{x}\right)dx$

6. Вычислите интегралы (смешанные с константами):

1) $\int (x^2+3)\,dx$

4) $\int (\cos x-4)\,dx$

7) $\int \left(\frac{dx}{\cos^2 x}+\pi\right)dx$

2) $\int (x^3-5)\,dx$

5) $\int \left(\frac{1}{x}+1\right)dx$

8) $\int \left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-2\right)dx$

3) $\int (\sin x+2)\,dx$

6) $\int (2^x+7)\,dx$

9) $\int \left(e^x+\frac{1}{1+x^2}+5\right)dx$

7. Вычислите интегралы (все приёмы вместе):

1) $\int (x^3-2\sin x+\frac{1}{x})\,dx$

5) $\int \left(\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

9) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{4}\right)dx$

2) $\int (3\cos x+2^x-4)\,dx$

6) $\int \left(x^{0.5}+x^{-0.5}\right)dx$

10) $\int (\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x?)$ — нет, тангенс не табличный, пока не умеем

3) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

7) $\int \left(\frac{2}{3x}+\frac{1}{2}\cos x\right)dx$

11) $\int \left(x^2+x+1\right)dx$

4) $\int \left(5e^x-\frac{3}{x}+\sin x\right)dx$

8) $\int \left(\frac{3}{4}\cdot 2^x-\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$

12) $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

8. Найдите ошибку (в каждом примере что-то не так):

1) $\int x^{-1}dx = \frac{x^0}{0}+C$ (на ноль делить нельзя)

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{ctg} x + C$ (перепутали с котангенсом)

2) $\int \frac{1}{2x}dx = \ln|2x|+C$ (забыли про коэффициент)

6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ (перепутали и забыли минус)

3) $\int \sin x dx = \cos x + C$ (потеряли минус)

7) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arcsin x + C$ (перепутали с арксинусом)

4) $\int \cos x dx = -\sin x + C$ (лишний минус)

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arctg} x + C$ (перепутали с арктангенсом)

Интеграл от суммы и разности

Теория

В этой главе мы научимся брать интегралы от сумм и разностей функций. Это очень простое, но важное свойство.

Запомните правило:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$
$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Что означают эти знаки?

- $f(x)$ и $g(x)$ — любые функции, которые мы умеем интегрировать
- Интеграл от суммы равен сумме интегралов
- Интеграл от разности равен разности интегралов

Важно! Это правило работает для любого конечного числа слагаемых. Если у нас сумма трёх, четырёх и более функций — мы просто берём интеграл от каждой отдельно и складываем.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Сумма двух степенных функций

Вычислите интеграл:

$$\int (x^2 + x^3)\,dx$$

По правилу интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int x^2\,dx + \int x^3\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$$

Пример 2

Разность степенных функций

Вычислите интеграл:

$$\int (x^4 - x^2)\,dx$$

Аналогично:

$$\int x^4\,dx - \int x^2\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C$$

Пример 3

Сумма синуса и косинуса

Вычислите интеграл:

$$\int (\sin x + \cos x)\,dx$$

Берём интеграл от каждого слагаемого:

$$\int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx = (-\cos x) + \sin x + C = \sin x - \cos x + C$$

Пример 4

Разность синуса и косинуса

Вычислите интеграл:

$$\int (\sin x - \cos x)\, dx$$

$$\int \sin x\, dx - \int \cos x\, dx = (-\cos x) - \sin x + C = -\cos x - \sin x + C$$

Пример 5

Сумма показательных функций

Вычислите интеграл:

$$\int (2^x + 3^x)\, dx$$

$$\int 2^x\, dx + \int 3^x\, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

Пример 6

Сумма трёх функций

Вычислите интеграл:

$$\int (x^2 + \sin x + \frac{1}{x})\, dx$$

Раскладываем на три интеграла:

$$\int x^2\, dx + \int \sin x\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + \ln|x| + C$$

Пример 7

Комбинация сумм и разностей

Вычислите интеграл:

$$\int (x^3 - 2^x + \cos x)\, dx$$

$$\int x^3\, dx - \int 2^x\, dx + \int \cos x\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2^x}{\ln 2} + \sin x + C$$

Пример 8

Проверка дифференцированием

Проверим пример 6. Берём производную от $\dfrac{x^3}{3} - \cos x + \ln|x| + C$:

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2, \quad (-\cos x)' = \sin x, \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Сумма даёт $x^2 + \sin x + \dfrac{1}{x}$ — исходную функцию. Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы (суммы степенных функций):

1) $\int (x^2 + x)\, dx$

2) $\int (x^3 + x^2)\, dx$

3) $\int (x^4 + x^3 + x^2)\, dx$

4) $\int (x^5 - x^3)\, dx$

5) $\int (x^6 - x^4 + x^2)\, dx$

6) $\int (x^{10} - x^5)\, dx$

7) $\int (2x^3+3x^2)\,dx$ 8) $\int (4x^5-5x^3)\,dx$ 9) $\int (x^2+x+1)\,dx$

2. Вычислите интегралы (с корнями и дробными степенями):

1) $\int (\sqrt{x}+x)\,dx$
4) $\int (x^{1/2}+x^{-1/2})\,dx$
7) $\int (x^{0.5}+x^{1.5})\,dx$
2) $\int (\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$
5) $\int (x^{2/3}-x^{1/3})\,dx$
8) $\int (x^{-0.3}-x^{0.2})\,dx$
3) $\int (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\,dx$
6) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2})\,dx$
9) $\int (\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

3. Вычислите интегралы (с тригонометрическими функциями):

1) $\int (\sin x+\cos x)\,dx$
4) $\int (4\sin x-5\cos x)\,dx$
7) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$
2) $\int (\sin x-\cos x)\,dx$
5) $\int (\sin x+\cos x+\sin x)\,dx$
8) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$
3) $\int (2\sin x+3\cos x)\,dx$
6) $\int (\sin x-\sin x)\,dx$
9) $\int (\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x?)$ — нет, тангенс пока не умеем

4. Вычислите интегралы (с показательными функциями):

1) $\int (2^x+3^x)\,dx$
4) $\int (3^x+4^x+5^x)\,dx$
7) $\int \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)dx$
2) $\int (2^x-3^x)\,dx$
5) $\int (2\cdot 2^x+3\cdot 3^x)\,dx$
8) $\int \left(2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)dx$
3) $\int (2^x+e^x)\,dx$
6) $\int (e^x-2^x)\,dx$
9) $\int (5\cdot 2^x-4\cdot e^x)\,dx$

5. Вычислите интегралы (с обратными тригонометрическими):

1) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$
3) $\int \left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dx}{1+x^2}\right)dx$
5) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{5}{1+x^2}\right)dx$
2) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{1+x^2}\right)dx$
4) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{3(1+x^2)}\right)dx$
6) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$

6. Вычислите интегралы (смешанные всех типов):

1) $\int (x^2+\sin x+\frac{1}{x})\,dx$
7) $\int (2\sin x+3\cos x-4e^x)\,dx$
2) $\int (x^3-\cos x+2^x)\,dx$
8) $\int \left(\frac{2}{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$
3) $\int (\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+e^x)\,dx$
9) $\int \left(x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$
4) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x-\frac{1}{x}\right)dx$
10) $\int (2^x+3^x+\sin x+\cos x)\,dx$
5) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\cos x+3^x\right)dx$
11) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{7}{1+x^2}+\frac{1}{2x}\right)dx$
6) $\int (x^{2/3}-x^{-1/3}+\frac{1}{1+x^2})\,dx$
12) $\int \left(x^{0.3}+x^{-0.3}+e^x\right)dx$

Вынесение константы

Теория

В этой главе мы научимся ещё одному простому, но очень полезному свойству — вынесению постоянного множителя за знак интеграла.

Запомните правило:

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

где k — любая константа (число).

Что означают эти знаки?

- k — постоянный множитель (число, которое не зависит от x)
- $f(x)$ — любая функция, которую мы умеем интегрировать
- Константу можно вынести за знак интеграла, а потом умножить на результат

Важно! Это правило работает только для постоянных множителей. Если множитель зависит от x — выносить нельзя!

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Вынесение числа перед степенной функцией

Вычислите интеграл:

$$\int 5x^3\,dx$$

Выносим пятёрку за знак интеграла:

$$5\int x^3\,dx = 5 \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{5x^4}{4} + C$$

Пример 2

Вынесение числа перед синусом

Вычислите интеграл:

$$\int 3\sin x\,dx$$

$$3\int \sin x\,dx = 3(-\cos x) + C = -3\cos x + C$$

Пример 3

Вынесение числа перед косинусом

Вычислите интеграл:

$$\int 7\cos x\,dx$$

$$7\int \cos x\,dx = 7\sin x + C$$

Пример 4

Вынесение числа перед показательной функцией

Вычислите интеграл:

$$\int 4 \cdot 2^x \, dx$$

$$4 \int 2^x \, dx = 4 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{4 \cdot 2^x}{\ln 2} + C$$

Пример 5

Вынесение отрицательного числа

Вычислите интеграл:

$$\int -2 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

Выносим минус двойку:

$$-2 \int \frac{1}{x} \, dx = -2 \ln |x| + C$$

Пример 6

Вынесение дроби

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} \, dx$$

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + C = \frac{1}{3} x^{3/2} + C = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + C$$

Пример 7

Вынесение из суммы

Вычислите интеграл:

$$\int (3x^2 + 4 \sin x) \, dx$$

Здесь у каждого слагаемого свой коэффициент. Раскладываем на сумму и выносим коэффициенты:

$$3 \int x^2 \, dx + 4 \int \sin x \, dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 4(-\cos x) + C = x^3 - 4 \cos x + C$$

Пример 8

Проверка дифференцированием

Проверим пример 1. Берём производную от $\frac{5x^4}{4} + C$:

$$\left(\frac{5x^4}{4} \right)' = \frac{5}{4} \cdot 4x^3 = 5x^3$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы (степенные функции):

1) $\int 2x^2 \, dx$	**3)** $\int 4x^4 \, dx$	**5)** $\int 10x^6 \, dx$	**7)** $\int \frac{2}{3} x^3 \, dx$
2) $\int 3x^3 \, dx$	**4)** $\int 5x^5 \, dx$	**6)** $\int \frac{1}{2} x^2 \, dx$	**8)** $\int \frac{3}{4} x^4 \, dx$

9) $\int 2x^{-2}\,dx$ 10) $\int 3x^{-3}\,dx$ 11) $\int 4x^{-4}\,dx$ 12) $\int 5x^{-5}\,dx$

2. Вычислите интегралы (корни):

1) $\int 2\sqrt{x}\,dx$ 4) $\int \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx$ 7) $\int 4\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ 10) $\int 3x^{2/3}\,dx$

2) $\int 3\sqrt{x}\,dx$ 5) $\int 2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 8) $\int 5\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ 11) $\int 4x^{-1/3}\,dx$

3) $\int 5\sqrt{x}\,dx$ 6) $\int 3\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 9) $\int 2x^{1/3}\,dx$ 12) $\int 5x^{-2/3}\,dx$

3. Вычислите интегралы (тригонометрические):

1) $\int 2\sin x\,dx$ 4) $\int 7\sin x\,dx$ 7) $\int 5\cos x\,dx$ 10) $\int \frac{1}{3}\cos x\,dx$

2) $\int 3\sin x\,dx$ 5) $\int 2\cos x\,dx$ 8) $\int 7\cos x\,dx$ 11) $\int \frac{2}{3}\sin x\,dx$

3) $\int 5\sin x\,dx$ 6) $\int 3\cos x\,dx$ 9) $\int \frac{1}{2}\sin x\,dx$ 12) $\int \frac{3}{4}\cos x\,dx$

4. Вычислите интегралы (тангенс и котангенс):

1) $\int \frac{2}{\cos^2 x}\,dx$ 4) $\int \frac{7}{\cos^2 x}\,dx$ 7) $\int \frac{5}{\sin^2 x}\,dx$ 10) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x}$

2) $\int \frac{3}{\cos^2 x}\,dx$ 5) $\int \frac{2}{\sin^2 x}\,dx$ 8) $\int \frac{7}{\sin^2 x}\,dx$ 11) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x}$

3) $\int \frac{5}{\cos^2 x}\,dx$ 6) $\int \frac{3}{\sin^2 x}\,dx$ 9) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x}$ 12) $\int \frac{dx}{5\sin^2 x}$

5. Вычислите интегралы (показательные):

1) $\int 2\cdot 2^x\,dx$ 4) $\int 5\cdot 3^x\,dx$ 7) $\int 5\cdot e^x\,dx$ 10) $\int \frac{1}{3}\cdot 3^x\,dx$

2) $\int 3\cdot 2^x\,dx$ 5) $\int 2\cdot e^x\,dx$ 8) $\int 10\cdot e^x\,dx$ 11) $\int \frac{2}{3}\cdot 2^x\,dx$

3) $\int 4\cdot 3^x\,dx$ 6) $\int 3\cdot e^x\,dx$ 9) $\int \frac{1}{2}\cdot 2^x\,dx$ 12) $\int \frac{3}{4}\cdot e^x\,dx$

6. Вычислите интегралы (обратные тригонометрические):

1) $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 4) $\int \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 7) $\int \frac{5}{1+x^2}\,dx$ 10) $\int \frac{dx}{3(1+x^2)}$

2) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 5) $\int \frac{2}{1+x^2}\,dx$ 8) $\int \frac{7}{1+x^2}\,dx$ 11) $\int \frac{dx}{4\sqrt{1-x^2}}$

3) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 6) $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx$ 9) $\int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}$ 12) $\int \frac{dx}{5(1+x^2)}$

7. Вычислите интегралы (смешанные с суммой и вынесением):

1) $\int (2x^2+3x)\,dx$ 4) $\int (5\sin x - 4\cos x)\,dx$ 7) $\int (2\cdot 2^x + 3\cdot 3^x)\,dx$

2) $\int (4x^3-5x^2)\,dx$ 5) $\int \left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$ 8) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4}{1+x^2}\right)dx$

3) $\int (3\sin x + 2\cos x)\,dx$ 6) $\int \left(\frac{4}{\cos^2 x}-\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$ 9) $\int (5\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+3e^x)\,dx$

Практика по блоку 2

Теория

В этом блоке мы изучили два важных свойства неопределённого интеграла:

- Интеграл от суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

- Константу можно выносить за знак интеграла:

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

Эти свойства работают вместе: сначала раскладываем сумму на отдельные интегралы, потом из каждого выносим коэффициенты, а затем берём каждый интеграл по таблице.

В этой главе собраны задачи на применение обоих свойств вперемешку с табличными интегралами из первого блока.

Задачи

1. Вычислите интегралы:

1) $\int (2x^3 + 3x^2)\,dx$

2) $\int (4x^5 - 5x^4)\,dx$

3) $\int (3x^2 + 2x + 1)\,dx$

4) $\int (5x^4 - 3x^3 + 2x^2)\,dx$

5) $\int (6x^5 - 4x^3 + 2x)\,dx$

6) $\int \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right)dx$

7) $\int \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2\right)dx$

8) $\int (2x^{-2} + 3x^{-3})\,dx$

9) $\int (4x^{-3} - 5x^{-4})\,dx$

2. Вычислите интегралы:

1) $\int (2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x})\,dx$

2) $\int (4\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x})\,dx$

3) $\int \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

4) $\int \left(2\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

5) $\int (3x^{1/2} + 4x^{1/3})\,dx$

6) $\int (5x^{2/3} - 2x^{-1/2})\,dx$

7) $\int (2x^{0.3} + 3x^{-0.3})\,dx$

8) $\int (4x^{1.5} - 5x^{-0.5})\,dx$

9) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)dx$

3. Вычислите интегралы:

1) $\int (2\sin x + 3\cos x)\,dx$

2) $\int (4\sin x - 5\cos x)\,dx$

3) $\int (3\sin x - 2\cos x + 1)\,dx$

4) $\int \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{3}\cos x\right)dx$

5) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$

6) $\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$

7) $\int \left(\frac{dx}{2\cos^2 x} + \frac{dx}{3\sin^2 x}\right)dx$

8) $\int (5\sin x - 2\frac{1}{\cos^2 x})\,dx$

9) $\int \left(\sin x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

4. Вычислите интегралы:

1) $\int (2\cdot 2^x + 3\cdot 3^x)\,dx$

2) $\int (4\cdot 2^x - 5\cdot 3^x)\,dx$

3) $\int (3\cdot e^x + 2\cdot 2^x)\,dx$

4) $\int \left(\frac{1}{2}\cdot 2^x + \frac{1}{3}\cdot 3^x\right)dx$

5) $\int \left(2\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot 2^x\right)dx$

6) $\int (2^x + 3^x + e^x)\,dx$

7) $\int (5\cdot 2^x - 3\cdot e^x + 4)\,dx$

8) $\int \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x\right)dx$

9) $\int \left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3\cdot e^x\right)dx$

5. Вычислите интегралы:

1) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+x^2}\right)dx$

2) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{5}{1+x^2}\right)dx$

3) $\int \left(\frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{dx}{3(1+x^2)}\right)dx$

4) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{1+x^2} - 4\right)dx$

5) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{1+x^2} + \frac{1}{x}\right)dx$

6) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}\right)dx$

6. Вычислите интегралы:

1) $\int \left(3x^2 + 2\sin x - \frac{1}{x}\right)dx$

2) $\int (4x^3 - 3\cos x + 2^x)\,dx$

3) $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + 5e^x\right)dx$

4) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} + 3\sin x - \frac{4}{x}\right)dx$

5) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2} + 4\cos x\right)dx$

6) $\int \left(2x^{2/3} - 3x^{-1/3} + \frac{1}{2x}\right)dx$

7) $\int (5\sin x - 2\cos x + 3\cdot 2^x)\,dx$

8) $\int \left(\frac{4}{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$

9) $\int \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$

10) $\int (2^x + 3^x + \sin x + \cos x)\,dx$

11) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{7}{1+x^2} + \frac{3}{2x} + 4\right)dx$

12) $\int \left(x^{0.3} + x^{-0.3} + e^x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

7. Вычислите интегралы:

1) $\int (2x^5 - 3x^4 + 4x^3)\,dx$

2) $\int \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x\right)dx$

3) $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 5\sqrt[3]{x}\right)dx$

4) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)dx$

5) $\int \left(4\sin x - 5\cos x + \frac{6}{\cos^2 x}\right)dx$

6) $\int \left(\frac{3}{\sin^2 x} - 2\cos x + \frac{1}{x}\right)dx$

7) $\int (2\cdot 2^x - 3\cdot e^x + 4\cdot 3^x)\,dx$

8) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{1+x^2} + \frac{3}{x}\right)dx$

9) $\int \left(2x^2 + 3\sin x - 4e^x + \frac{5}{x}\right)dx$

10) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$

11) $\int \left(2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x + \sin x + \cos x\right)dx$

12) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

Интегралы вида $\int (ax+b)^n dx$

Теория

В этой главе мы научимся брать интегралы от линейных функций в степени. Это наш первый шаг в освоении метода замены переменной.

Запомните формулу:

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$$

Что означают эти знаки?

- a и b — числа, причём $a \neq 0$
- n — любая степень, кроме -1 (случай $n = -1$ разберём позже)
- В знаменателе появляется $a(n+1)$ — это потому что при замене $t = ax+b$ мы получаем $dx = \frac{dt}{a}$

Как запомнить: действуем по тому же правилу, что и для x^n, но в знаменателе добавляем ещё и a.

Частные случаи:

- При $n = 0$: $\int (ax+b)^0\,dx = \int 1\,dx = x + C$, но по формуле получается $\frac{(ax+b)^1}{a\cdot 1} = \frac{ax+b}{a} = x + \frac{b}{a}$, что не одно и то же! Почему? Потому что формула работает только при $n \neq 0$? Нет, она работает и при $n = 0$, но даёт другую запись ответа. На самом деле $\frac{ax+b}{a} = x + \frac{b}{a}$, а $\frac{b}{a}$ — это константа, которая поглощается C. Так что ответы эквивалентны.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Линейная функция в первой степени

Вычислите интеграл:

$$\int (2x+1)^5\,dx$$

Здесь $a = 2$, $b = 1$, $n = 5$. По формуле увеличиваем степень на 1 и делим на $a(n+1) = 2\cdot 6 = 12$:

$$\int (2x+1)^5\,dx = \frac{(2x+1)^6}{2\cdot 6} + C = \frac{(2x+1)^6}{12} + C$$

Пример 2

Отрицательная степень

Вычислите интеграл:

$$\int (3x-2)^{-4}\,dx$$

Здесь $a = 3$, $b = -2$, $n = -4$. Увеличиваем степень на 1: было -4, стало -3. Делим на $a(n+1) = 3\cdot(-3) = -9$:

$$\int (3x-2)^{-4}\,dx = \frac{(3x-2)^{-3}}{-9} + C = -\frac{1}{9(3x-2)^3} + C$$

Пример 3

Корень — это дробная степень

Вычислите интеграл:

$$\int \sqrt{4x+5}\,dx$$

Преобразуем корень в степень: $\sqrt{4x+5} = (4x+5)^{1/2}$. Здесь $a = 4$, $b = 5$, $n = \frac{1}{2}$. Увеличиваем степень на 1: $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$. Делим на $a(n+1) = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$:

$$\int (4x+5)^{1/2}\,dx = \frac{(4x+5)^{3/2}}{6} + C = \frac{1}{6}\sqrt{(4x+5)^3} + C$$

Пример 4

Единица в числителе (степень -1 пока не умеем)

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{1}{2x-1}\,dx$$

Это случай $n = -1$, для него формула не работает. Его мы научимся брать позже, там будет логарифм.

Пример 5

С отрицательным коэффициентом a

Вычислите интеграл:

$$\int (5-3x)^4\,dx$$

Лучше записать в стандартном виде: $-3x+5$, то есть $a = -3$, $b = 5$, $n = 4$. Увеличиваем степень на 1: было 4, стало 5. Делим на $a(n+1) = (-3)\cdot 5 = -15$:

$$\int (5-3x)^4\,dx = \frac{(5-3x)^5}{-15} + C = -\frac{(5-3x)^5}{15} + C$$

Пример 6

Коэффициент перед интегралом

Вычислите интеграл:

$$\int 3(2x+1)^4\,dx$$

Выносим константу и применяем формулу:

$$3\int (2x+1)^4\,dx = 3\cdot\frac{(2x+1)^5}{2\cdot 5} + C = 3\cdot\frac{(2x+1)^5}{10} + C = \frac{3(2x+1)^5}{10} + C$$

Пример 7

Сумма таких интегралов

Вычислите интеграл:

$$\int \left((2x+1)^3 + (3x-2)^2\right)dx$$

Раскладываем на сумму и применяем формулу к каждому:

$$\int (2x+1)^3\,dx + \int (3x-2)^2\,dx = \frac{(2x+1)^4}{2\cdot 4} + \frac{(3x-2)^3}{3\cdot 3} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + \frac{(3x-2)^3}{9} + C$$

Пример 8

Проверка дифференцированием

Проверим пример 1. Берём производную от $\frac{(2x+1)^6}{12} + C$:

$$\frac{1}{12}\cdot 6(2x+1)^5\cdot 2 = \frac{1}{12}\cdot 12(2x+1)^5 = (2x+1)^5$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы (целые положительные степени):

1) $\int (2x+1)^3\,dx$

2) $\int (3x-2)^4\,dx$

3) $\int (4x+3)^2\,dx$

4) $\int (5x-1)^5\,dx$

5) $\int (x+2)^6\,dx$

6) $\int (x-3)^4\,dx$

7) $\int (2x-5)^3\,dx$

8) $\int (3x+4)^4\,dx$

9) $\int (6x+1)^2\,dx$

10) $\int (4x-3)^5\,dx$

11) $\int (7x+2)^3\,dx$

12) $\int (8x-5)^4\,dx$

2. Вычислите интегралы (отрицательные степени, кроме -1):

1) $\int (2x+1)^{-3}\,dx$

2) $\int (3x-2)^{-4}\,dx$

3) $\int (4x+3)^{-2}\,dx$

4) $\int (5x-1)^{-5}\,dx$

5) $\int (x+2)^{-6}\,dx$

6) $\int (x-3)^{-4}\,dx$

7) $\int \frac{1}{(2x-5)^3}\,dx$

8) $\int \frac{1}{(3x+4)^4}\,dx$

9) $\int \frac{1}{(6x+1)^2}\,dx$

10) $\int \frac{1}{(4x-3)^5}\,dx$

11) $\int \frac{1}{(7x+2)^3}\,dx$

12) $\int \frac{1}{(8x-5)^4}\,dx$

3. Вычислите интегралы (корни — дробные степени):

1) $\int \sqrt{2x+1}\,dx$

2) $\int \sqrt{3x-2}\,dx$

3) $\int \sqrt[3]{4x+3}\,dx$

4) $\int \sqrt[4]{5x-1}\,dx$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-2}}\,dx$

7) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{4x+3}}\,dx$

8) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{5x-1}}\,dx$

9) $\int (2x+1)^{2/3}\,dx$

10) $\int (3x-2)^{3/4}\,dx$

11) $\int (4x+3)^{-1/2}\,dx$

12) $\int (5x-1)^{-2/3}\,dx$

4. Вычислите интегралы (с коэффициентами перед интегралом):

1) $\int 2(2x+1)^3\,dx$

2) $\int 3(3x-2)^4\,dx$

3) $\int 4(4x+3)^2\,dx$

4) $\int 5(5x-1)^{-3}\,dx$

5) $\int \frac{1}{2}(2x+1)^4\,dx$

6) $\int \frac{2}{3}(3x-2)^5\,dx$

7) $\int \frac{3}{4}\sqrt{4x+3}\,dx$

8) $\int \frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt{5x-1}}\,dx$

9) $\int 2(2x+1)^{-2}\,dx$

10) $\int 3(3x-2)^{-3}\,dx$

11) $\int \frac{1}{3}(4x+3)^{1/2}\,dx$

12) $\int \frac{2}{5}(5x-1)^{2/3}\,dx$

5. Вычислите интегралы (суммы):

1) $\int \left((2x+1)^3+(3x-2)^2\right)dx$

2) $\int \left((4x+3)^4-(5x-1)^3\right)dx$

3) $\int \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x-2}\right)dx$

4) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{1}{\sqrt{3x-2}}\right)dx$

5) $\displaystyle\int \left(2(2x+1)^3 + 3(3x-2)^2\right) dx$

6) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2}(4x+3)^4 - \frac{2}{3}(5x-1)^3\right) dx$

7) $\displaystyle\int \left((2x+1)^3 + \frac{1}{(2x+1)^3}\right) dx$

8) $\displaystyle\int \left(\sqrt{2x+1} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right) dx$

9) $\displaystyle\int \left((3x-2)^2 + (3x-2)^{-2}\right) dx$

10) $\displaystyle\int \left((4x+3)^{1/2} + (4x+3)^{-1/2}\right) dx$

11) $\displaystyle\int \left(3(2x-1)^4 + 2(2x-1)^{-4}\right) dx$

12) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{3}(5x+2)^{2/3} - \frac{3}{4}(5x+2)^{-1/3}\right) dx$

Интегралы вида $\int e^{ax+b}dx$

Теория

В этой главе мы научимся брать интегралы от экспоненты с линейным аргументом.

Запомните формулу:

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$$

Что означают эти знаки?

- a и b — числа, причём $a \neq 0$
- В знаменателе появляется a — это потому что при замене $t = ax + b$ мы получаем $dx = \frac{dt}{a}$

Как запомнить: берём интеграл от экспоненты — она не меняется, но потом делим на коэффициент a при x.

Для показательной функции с другим основанием формула выглядит так:

$$\int a^{px+q}\,dx = \frac{a^{px+q}}{p \ln a} + C$$

Но в этой главе мы сосредоточимся на экспоненте.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простая экспонента

Вычислите интеграл:

$$\int e^{2x}\,dx$$

Здесь $a = 2$, $b = 0$. По формуле делим на a:

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

Пример 2

Экспонента с линейным аргументом

Вычислите интеграл:

$$\int e^{3x+4}\,dx$$

Здесь $a = 3$, $b = 4$. Делим на 3:

$$\int e^{3x+4}\,dx = \frac{e^{3x+4}}{3} + C$$

Пример 3

Отрицательный коэффициент

Вычислите интеграл:

$$\int e^{-2x+1}\,dx$$

Здесь $a = -2$. Делим на -2:

$$\int e^{-2x+1}\,dx = \frac{e^{-2x+1}}{-2} + C = -\frac{e^{-2x+1}}{2} + C$$

Пример 4

Дробный коэффициент

Вычислите интеграл:

$$\int e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

Здесь $a = \dfrac{1}{2}$. Делим на $\dfrac{1}{2}$ (то есть умножаем на 2):

$$\int e^{x/2}\,dx = \frac{e^{x/2}}{1/2} + C = 2e^{x/2} + C$$

Пример 5

Коэффициент перед интегралом

Вычислите интеграл:

$$\int 5e^{3x-2}\,dx$$

Выносим константу и применяем формулу:

$$5\int e^{3x-2}\,dx = 5\cdot\frac{e^{3x-2}}{3} + C = \frac{5e^{3x-2}}{3} + C$$

Пример 6

Сумма экспонент

Вычислите интеграл:

$$\int \left(e^{2x} + e^{3x}\right) dx$$

Раскладываем на сумму:

$$\int e^{2x}\,dx + \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{3x}}{3} + C$$

Пример 7

Разность экспонент

Вычислите интеграл:

$$\int \left(e^{4x} - e^{-x}\right) dx$$

$$\int e^{4x}\,dx - \int e^{-x}\,dx = \frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{-x}}{-1} + C = \frac{e^{4x}}{4} + e^{-x} + C$$

Пример 8

Проверка дифференцированием

Проверим пример 2. Берём производную от $\dfrac{e^{3x+4}}{3} + C$:

$$\frac{1}{3}\cdot e^{3x+4}\cdot 3 = e^{3x+4}$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы:

1) $\int e^{2x}\,dx$ 5) $\int e^{10x}\,dx$ 9) $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$

2) $\int e^{3x}\,dx$ 6) $\int e^{0.5x}\,dx$ 10) $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx$

3) $\int e^{4x}\,dx$ 7) $\int e^{0.2x}\,dx$ 11) $\int e^{\frac{x}{5}}\,dx$

4) $\int e^{5x}\,dx$ 8) $\int e^{0.1x}\,dx$ 12) $\int e^{\frac{x}{10}}\,dx$

2. Вычислите интегралы:

1) $\int e^{x+1}\,dx$ 5) $\int e^{2x+1}\,dx$ 9) $\int e^{4x+5}\,dx$

2) $\int e^{x+2}\,dx$ 6) $\int e^{2x-3}\,dx$ 10) $\int e^{4x-5}\,dx$

3) $\int e^{x-1}\,dx$ 7) $\int e^{3x+2}\,dx$ 11) $\int e^{5x+1}\,dx$

4) $\int e^{x-3}\,dx$ 8) $\int e^{3x-4}\,dx$ 12) $\int e^{5x-2}\,dx$

3. Вычислите интегралы (отрицательный коэффициент):

1) $\int e^{-x}\,dx$ 5) $\int e^{-5x}\,dx$ 9) $\int e^{-3x-2}\,dx$

2) $\int e^{-2x}\,dx$ 6) $\int e^{-0.5x}\,dx$ 10) $\int e^{-4x-1}\,dx$

3) $\int e^{-3x}\,dx$ 7) $\int e^{-x+1}\,dx$ 11) $\int e^{1-x}\,dx$

4) $\int e^{-4x}\,dx$ 8) $\int e^{-2x+3}\,dx$ 12) $\int e^{2-3x}\,dx$

4. Вычислите интегралы (с коэффициентами):

1) $\int 2e^{3x}\,dx$ 5) $\int 6e^{3x-2}\,dx$ 9) $\int \frac{2}{3}e^{4x}\,dx$

2) $\int 3e^{4x}\,dx$ 6) $\int 7e^{4x+3}\,dx$ 10) $\int \frac{3}{4}e^{5x-1}\,dx$

3) $\int 4e^{5x}\,dx$ 7) $\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$ 11) $\int \frac{4}{5}e^{2x+3}\,dx$

4) $\int 5e^{2x+1}\,dx$ 8) $\int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx$ 12) $\int \frac{5}{6}e^{3x-4}\,dx$

5. Вычислите интегралы (суммы и разности):

1) $\int (e^{2x} + e^{3x})\,dx$ 5) $\int (e^{x+1} + e^{x-1})\,dx$

2) $\int (e^{2x} - e^{3x})\,dx$ 6) $\int (e^{2x+1} - e^{2x-1})\,dx$

3) $\int (e^{2x} + e^{-2x})\,dx$ 7) $\int (2e^{3x} + 3e^{4x})\,dx$

4) $\int (e^{3x} - e^{-3x})\,dx$ 8) $\int (4e^{5x} - 5e^{2x})\,dx$

9) $\int \left(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x}\right) dx$

10) $\int \left(\frac{2}{3}e^{4x} - \frac{3}{4}e^{5x}\right) dx$

11) $\int (e^{0.2x} + e^{0.3x})\, dx$

12) $\int (e^{0.5x} - e^{-0.5x})\, dx$

6. Вычислите интегралы:

1) $\int (e^{2x} + x^2)\, dx$

2) $\int (e^{3x} - \frac{1}{x})\, dx$

3) $\int (e^{x+1} + \sqrt{x})\, dx$

4) $\int (2e^{2x} - 3x^3)\, dx$

5) $\int \left(e^{0.5x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

6) $\int \left(e^{2x-1} + \frac{1}{2x}\right) dx$

7) $\int \left(e^{3x} + e^{-3x} + 5\right) dx$

8) $\int \left(e^{4x+1} - \sin x\right) dx$ — синус пока не умеем с линейным аргументом

9) $\int \left(e^{2x} + x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$

10) $\int \left(3e^{5x} - 4x^4 + 2\right) dx$

11) $\int \left(e^{0.2x} + e^{-0.2x} + 7\right) dx$

12) $\int \left(\frac{1}{2}e^{4x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{3}x^3\right) dx$

Интегралы вида $\int \sin(ax+b)dx$ и $\int \cos(ax+b)dx$

Теория

В этой главе мы научимся брать интегралы от синуса и косинуса с линейным аргументом.

Запомните формулы:

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$$

Что означают эти знаки?

- a и b — числа, причём $a \neq 0$
- В знаменателе появляется a — это потому что при замене $t = ax + b$ мы получаем $dx = \frac{dt}{a}$
- Для синуса появляется минус, как и в табличном интеграле от $\sin x$

Как запомнить: берём интеграл как от обычного синуса или косинуса, но потом делим на коэффициент a при x.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Синус с линейным аргументом

Вычислите интеграл:

$$\int \sin 2x\,dx$$

Здесь $a = 2$, $b = 0$. По формуле для синуса:

$$\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

Пример 2

Косинус с линейным аргументом

Вычислите интеграл:

$$\int \cos 3x\,dx$$

Здесь $a = 3$:

$$\int \cos 3x\,dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

Пример 3

Синус с аргументом $ax + b$

Вычислите интеграл:

$$\int \sin(2x+1)\,dx$$

Здесь $a = 2$, $b = 1$:

$$\int \sin(2x+1)\,dx = -\frac{\cos(2x+1)}{2} + C$$

Пример 4

Косинус с аргументом $ax + b$

Вычислите интеграл:

$$\int \cos(3x-2)\,dx$$

Здесь $a = 3$, $b = -2$:

$$\int \cos(3x-2)\,dx = \frac{\sin(3x-2)}{3} + C$$

Пример 5

Отрицательный коэффициент a

Вычислите интеграл:

$$\int \sin(5-2x)\,dx$$

Запишем аргумент в стандартном виде: $-2x + 5$, то есть $a = -2$. По формуле для синуса:

$$\int \sin(5-2x)\,dx = -\frac{\cos(5-2x)}{-2} + C = \frac{\cos(5-2x)}{2} + C$$

Будьте внимательны с минусами!

Пример 6

Дробный коэффициент

Вычислите интеграл:

$$\int \cos\frac{x}{2}\,dx$$

Здесь $a = \frac{1}{2}$. Делим на $\frac{1}{2}$ (то есть умножаем на 2):

$$\int \cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{\sin\frac{x}{2}}{1/2} + C = 2\sin\frac{x}{2} + C$$

Пример 7

Коэффициент перед интегралом

Вычислите интеграл:

$$\int 4\sin(3x-1)\,dx$$

Выносим константу и применяем формулу:

$$4\int \sin(3x-1)\,dx = 4\cdot\left(-\frac{\cos(3x-1)}{3}\right) + C = -\frac{4\cos(3x-1)}{3} + C$$

Пример 8

Сумма синуса и косинуса

Вычислите интеграл:

$$\int (\sin 2x + \cos 3x)\,dx$$

Раскладываем на сумму:

$$\int \sin 2x\,dx + \int \cos 3x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + C$$

Пример 9

Проверка дифференцированием

Проверим пример 1. Берём производную от $-\dfrac{\cos 2x}{2}+C$:

$$-\frac{1}{2}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2=\sin 2x$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы (синус):

1) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx$ 5) $\displaystyle\int \sin 10x\,dx$ 9) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{4}\,dx$

2) $\displaystyle\int \sin 3x\,dx$ 6) $\displaystyle\int \sin 0.5x\,dx$ 10) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{5}\,dx$

3) $\displaystyle\int \sin 4x\,dx$ 7) $\displaystyle\int \sin 0.2x\,dx$ 11) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{10}\,dx$

4) $\displaystyle\int \sin 5x\,dx$ 8) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{3}\,dx$ 12) $\displaystyle\int \sin\pi x\,dx$

2. Вычислите интегралы (косинус):

1) $\displaystyle\int \cos 2x\,dx$ 5) $\displaystyle\int \cos 10x\,dx$ 9) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{4}\,dx$

2) $\displaystyle\int \cos 3x\,dx$ 6) $\displaystyle\int \cos 0.5x\,dx$ 10) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{5}\,dx$

3) $\displaystyle\int \cos 4x\,dx$ 7) $\displaystyle\int \cos 0.2x\,dx$ 11) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{10}\,dx$

4) $\displaystyle\int \cos 5x\,dx$ 8) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{3}\,dx$ 12) $\displaystyle\int \cos\pi x\,dx$

3. Вычислите интегралы (с аргументом $ax+b$):

1) $\displaystyle\int \sin(x+1)\,dx$ 5) $\displaystyle\int \sin(3x+2)\,dx$ 9) $\displaystyle\int \cos(2x+3)\,dx$

2) $\displaystyle\int \sin(x-2)\,dx$ 6) $\displaystyle\int \sin(3x-4)\,dx$ 10) $\displaystyle\int \cos(2x-4)\,dx$

3) $\displaystyle\int \sin(2x+1)\,dx$ 7) $\displaystyle\int \cos(x+2)\,dx$ 11) $\displaystyle\int \cos(3x+5)\,dx$

4) $\displaystyle\int \sin(2x-3)\,dx$ 8) $\displaystyle\int \cos(x-3)\,dx$ 12) $\displaystyle\int \cos(3x-6)\,dx$

4. Вычислите интегралы (отрицательный коэффициент):

1) $\displaystyle\int \sin(-x)\,dx$ 5) $\displaystyle\int \sin(2-3x)\,dx$ 9) $\displaystyle\int \cos(-3x)\,dx$

2) $\displaystyle\int \sin(-2x)\,dx$ 6) $\displaystyle\int \sin(3-4x)\,dx$ 10) $\displaystyle\int \cos(1-2x)\,dx$

3) $\displaystyle\int \sin(-3x)\,dx$ 7) $\displaystyle\int \cos(-x)\,dx$ 11) $\displaystyle\int \cos(2-3x)\,dx$

4) $\displaystyle\int \sin(1-2x)\,dx$ 8) $\displaystyle\int \cos(-2x)\,dx$ 12) $\displaystyle\int \cos(3-4x)\,dx$

5. Вычислите интегралы (с коэффициентами):

1) $\int 2\sin 3x\,dx$

2) $\int 3\sin 4x\,dx$

3) $\int 4\sin 5x\,dx$

4) $\int 5\sin(2x+1)\,dx$

5) $\int 6\sin(3x-2)\,dx$

6) $\int 7\sin(4x+3)\,dx$

7) $\int 2\cos 3x\,dx$

8) $\int 3\cos 4x\,dx$

9) $\int 4\cos 5x\,dx$

10) $\int 5\cos(2x-1)\,dx$

11) $\int 6\cos(3x+2)\,dx$

12) $\int 7\cos(4x-3)\,dx$

13) $\int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

14) $\int \frac{1}{3}\cos 3x\,dx$

15) $\int \frac{2}{3}\sin 4x\,dx$

16) $\int \frac{3}{4}\cos 5x\,dx$

17) $\int \frac{4}{5}\sin(3x+1)\,dx$

18) $\int \frac{5}{6}\cos(4x-2)\,dx$

6. Вычислите интегралы (суммы и разности):

1) $\int (\sin 2x+\cos 2x)\,dx$

2) $\int (\sin 3x-\cos 3x)\,dx$

3) $\int (\sin 2x+\sin 3x)\,dx$

4) $\int (\cos 2x-\cos 3x)\,dx$

5) $\int (\sin(2x+1)+\cos(2x-1))\,dx$

6) $\int (\sin(3x-2)-\cos(3x+2))\,dx$

7) $\int (2\sin 3x+3\cos 4x)\,dx$

8) $\int (4\sin 5x-5\cos 2x)\,dx$

9) $\int \left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx$

10) $\int \left(\frac{2}{3}\sin 4x-\frac{3}{4}\cos 5x\right)dx$

11) $\int (\sin 0.5x+\cos 0.5x)\,dx$

12) $\int (\sin \pi x+\cos \pi x)\,dx$

7. Вычислите интегралы (смешанные с предыдущими темами):

1) $\int (\sin 2x+e^{2x})\,dx$

2) $\int (\cos 3x-e^{-x})\,dx$

3) $\int (\sin(2x+1)+x^2)\,dx$

4) $\int (\cos(3x-2)-\frac{1}{x})\,dx$

5) $\int (2\sin 3x+3e^{2x}-4)\,dx$

6) $\int (5\cos 4x-2e^{-3x}+\sqrt{x})\,dx$

7) $\int \left(\sin 0.2x+\cos 0.3x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

8) $\int \left(e^{0.5x}-\sin 0.5x+\frac{1}{x}\right)dx$

9) $\int \left((2x+1)^3+\sin 2x\right)dx$

10) $\int \left(\frac{1}{2x}+\cos 3x+5\right)dx$

11) $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}+e^{x/4}\right)dx$

12) $\int \left(3\sin 2x-2\cos 3x+4e^{0.5x}-7\right)dx$

Практика по блоку 3

Теория

В этом блоке мы изучили интегралы от функций с линейным аргументом:

- Степенная функция: $\int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$
- Экспонента: $\int e^{ax+b}\,dx = \dfrac{e^{ax+b}}{a} + C$
- Синус: $\int \sin(ax+b)\,dx = -\dfrac{\cos(ax+b)}{a} + C$
- Косинус: $\int \cos(ax+b)\,dx = \dfrac{\sin(ax+b)}{a} + C$

Во всех формулах не забываем делить на коэффициент a при x и добавлять C.

В этой главе собраны задачи на все эти типы интегралов вперемешку, а также с предыдущими темами (табличные интегралы, сумма, вынесение константы).

Задачи

1. Вычислите интегралы (степенные с линейным аргументом):

1) $\int (2x+1)^3\,dx$ **5)** $\int \sqrt{2x+1}\,dx$ **9)** $\int \sqrt[3]{4x+3}\,dx$

2) $\int (3x-2)^4\,dx$ **6)** $\int \dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}\,dx$ **10)** $\int \dfrac{1}{(2x-5)^2}\,dx$

3) $\int (4x+3)^2\,dx$ **7)** $\int (x+2)^5\,dx$ **11)** $\int (6x+1)^{1/2}\,dx$

4) $\int (5x-1)^{-3}\,dx$ **8)** $\int (x-3)^{-4}\,dx$ **12)** $\int (7x-2)^{-2/3}\,dx$

2. Вычислите интегралы (экспонента с линейным аргументом):

1) $\int e^{2x}\,dx$ **5)** $\int e^{0.5x}\,dx$ **9)** $\int \frac{1}{2}e^{4x}\,dx$

2) $\int e^{3x+1}\,dx$ **6)** $\int e^{1-3x}\,dx$ **10)** $\int \frac{2}{3}e^{5x+2}\,dx$

3) $\int e^{-2x}\,dx$ **7)** $\int 2e^{3x}\,dx$ **11)** $\int e^{x/2}\,dx$

4) $\int e^{4x-3}\,dx$ **8)** $\int 3e^{2x-1}\,dx$ **12)** $\int e^{-x/3}\,dx$

3. Вычислите интегралы (синус и косинус с линейным аргументом):

1) $\int \sin 2x\,dx$ **4)** $\int \cos(3x-2)\,dx$ **7)** $\int 2\sin 4x\,dx$

2) $\int \cos 3x\,dx$ **5)** $\int \sin(5-2x)\,dx$ **8)** $\int 3\cos 5x\,dx$

3) $\int \sin(2x+1)\,dx$ **6)** $\int \cos(4-3x)\,dx$ **9)** $\int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

10) $\int \frac{1}{3}\cos 3x\,dx$ 11) $\int \sin\frac{x}{2}\,dx$ 12) $\int \cos\frac{x}{3}\,dx$

4. Вычислите интегралы (суммы внутри одного блока):

1) $\int \left((2x+1)^3+(2x+1)^2\right)dx$

2) $\int \left(\sqrt{3x-2}+\frac{1}{\sqrt{3x-2}}\right)dx$

3) $\int \left(e^{2x}+e^{-2x}\right)dx$

4) $\int \left(e^{3x+1}-e^{3x-1}\right)dx$

5) $\int (\sin 2x+\cos 2x)\,dx$

6) $\int (\sin 3x-\sin 2x)\,dx$

7) $\int (\sin(2x+1)+\cos(2x-1))\,dx$

8) $\int \left((2x+1)^4+e^{2x}\right)dx$

9) $\int \left(\sqrt{4x-3}-\sin 4x\right)dx$

10) $\int \left(e^{0.5x}+\cos 0.5x\right)dx$

11) $\int \left(\frac{1}{(2x-1)^2}+\frac{1}{2x-1}\right)dx$ — второе пока не умеем

12) $\int \left((3x+2)^3+e^{3x+2}+\sin(3x+2)\right)dx$

5. Вычислите интегралы (смешанные с табличными):

1) $\int \left((2x+1)^3+x^2\right)dx$

2) $\int \left(e^{2x}+\frac{1}{x}\right)dx$

3) $\int (\sin 3x+\cos x)\,dx$

4) $\int \left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}\right)dx$

5) $\int \left(2e^{3x}-3x^2+4\right)dx$

6) $\int \left(\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\cos 2x-5\right)dx$

7) $\int \left((4x+1)^{-2}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

8) $\int \left(e^{0.2x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+2^x\right)dx$

9) $\int \left(\sin 0.5x+\cos 0.3x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

10) $\int \left(3(2x-1)^4-2\sin(3x+1)+e^{4x-2}\right)dx$

11) $\int \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x-1}\right)dx$ — второе пока не умеем

12) $\int \left(x^{0.3}+e^{0.3x}+\sin 0.3x\right)dx$

6. Вычислите интегралы (все приёмы блока 3):

1) $\int \left((3x-1)^4+e^{2x+1}-\sin(2x-3)\right)dx$

2) $\int \left(2\sqrt{4x+3}-3e^{1-2x}+4\cos(5x-1)\right)dx$

3) $\int \left(\frac{1}{(2x+1)^3}+\frac{1}{2}e^{4x-2}-\frac{1}{3}\sin(3x+2)\right)dx$

4) $\int \left((5x-2)^{2/3}+e^{0.4x}+\cos 0.5x\right)dx$

5) $\int \left(3\sin(2x+1)-2\cos(3x-1)+4e^{0.5x}\right)dx$

6) $\int \left(\sqrt{2x-1}+\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+e^{2x-1}\right)dx$

7) $\int \left((4x+3)^3+(4x+3)^2+(4x+3)\right)dx$

8) $\int \left(e^{3x}+e^{2x}+e^{x}\right)dx$

9) $\int (\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x)\,dx$

10) $\int (\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x)\,dx$

11) $\int \left((2x+1)^3+e^{2x+1}+\sin(2x+1)\right)dx$

12) $\int \left(\frac{1}{2}(3x-2)^4-\frac{2}{3}e^{3x-2}+\frac{3}{4}\cos(3x-2)\right)dx$

Подведение под знак дифференциала

Теория

В этой главе мы познакомимся с одним из самых мощных приёмов интегрирования — подведением под знак дифференциала. По сути, это тот же метод замены переменной, только в упрощённой форме.

Основная идея: Если мы видим, что под интегралом есть функция и её производная (с точностью до постоянного множителя), то можно "подвести"производную под знак дифференциала.

Формула:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

где F — первообразная для f.

Как это работает на практике:

Что видим под интегралом	Что делаем	Что получаем
$\int 2x \cdot e^{x^2} dx$	Замечаем, что $(x^2)' = 2x$	$\int e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} + C$
$\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$	$(\sin x)' = \cos x$	$\int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$
$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$	$(x^2+x+1)' = 2x+1$	$\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \ln\lvert x^2+x+1\rvert + C$

Важно! Иногда нужного множителя не хватает — тогда его можно добавить искусственно, умножив и разделив на нужное число.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Экспонента от квадрата

Вычислите интеграл:

$$\int 2xe^{x^2}\, dx$$

Замечаем, что производная от x^2 равна $2x$. Значит, можно подвести $2x$ под знак дифференциала:

$$\int e^{x^2} \cdot 2x\, dx = \int e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} + C$$

Пример 2

Экспонента от синуса

Вычислите интеграл:

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x}\, dx$$

Производная от $\sin x$ равна $\cos x$. Подводим $\cos x$ под дифференциал:

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x\, dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

Пример 3

Логарифм от знаменателя

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx$$

Производная от x^2+x+1 равна $2x+1$. Значит:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx = \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \ln\lvert x^2+x+1\rvert + C$$

Пример 4

Не хватает коэффициента

Вычислите интеграл:

$$\int xe^{x^2}\,dx$$

Здесь производная от x^2 равна $2x$, а у нас только x. Не хватает двойки. Добавим её искусственно:

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Пример 5

Степень в знаменателе

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

Производная от x^2+1 равна $2x$. У нас есть x, не хватает двойки:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-1/2}d(x^2+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{1/2}}{1/2} + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

Пример 6

Тангенс

Вычислите интеграл:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx$$

Запишем тангенс как $\dfrac{\sin x}{\cos x}$. Замечаем, что производная от $\cos x$ равна $-\sin x$:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

Пример 7

Котангенс

Вычислите интеграл:

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx$$

Аналогично: $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, производная от $\sin x$ равна $\cos x$:

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

Пример 8

Линейная функция в степени

Вычислите интеграл:

$$\int (2x+1)^5\,dx$$

Этот интеграл мы уже умеем брать по формуле линейной замены. Но можно и подведением под дифференциал: заметим, что $d(2x+1) = 2dx$, значит $dx = \dfrac{d(2x+1)}{2}$:

$$\int (2x+1)^5\,dx = \int (2x+1)^5\cdot\frac{d(2x+1)}{2} = \frac{1}{2}\int (2x+1)^5 d(2x+1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^6}{6} + C = \frac{(2x+1)^6}{12} + C$$

Результат совпадает с тем, что мы получали по формуле.

Пример 9

Проверка дифференцированием

Проверим пример 4. Берём производную от $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$:

$$\frac{1}{2} \cdot e^{x^2} \cdot 2x = xe^{x^2}$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы (простая экспонента):

1) $\int 2xe^{x^2}\,dx$

2) $\int 3x^2e^{x^3}\,dx$

3) $\int 4x^3e^{x^4}\,dx$

4) $\int xe^{x^2}\,dx$

5) $\int x^2e^{x^3}\,dx$

6) $\int x^3e^{x^4}\,dx$

7) $\int \cos x \cdot e^{\sin x}\,dx$

8) $\int \sin x \cdot e^{\cos x}\,dx$

9) $\int \frac{1}{x}e^{\ln x}\,dx$ — подумайте, что это?

2. Вычислите интегралы (рациональные):

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

2) $\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$

3) $\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx$

4) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

5) $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

6) $\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$

7) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

8) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$

9) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

3. Вычислите интегралы (корни):

1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$

5) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

6) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

7) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

8) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

9) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx$ — сложнее

4. Вычислите интегралы (тригонометрические):

1) $\int \operatorname{tg} x\,dx$

2) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$

3) $\int \sin x \cos x\,dx$

4) $\int \sin^2 x \cos x\,dx$

5) $\int \cos^2 x \sin x\,dx$

6) $\int \sin^3 x \cos x\,dx$

7) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

8) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

9) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

5. Вычислите интегралы (показательные):

1) $\int 2^x \ln 2\, dx$ — зачем здесь $\ln 2$?

2) $\int 3^x \ln 3\, dx$

3) $\int 2^x \cdot 3^{x^2} \cdot 2x \ln 3\, dx$ — сложно

4) $\int e^x \cdot e^{e^x}\, dx$

5) $\int e^x \cdot \sin(e^x)\, dx$

6) $\int e^x \cdot \cos(e^x)\, dx$

7) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$

8) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$ — сложнее

9) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\, dx$

6. Вычислите интегралы (смешанные):

1) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

2) $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$

3) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$

4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

5) $\int \frac{x^3+x}{x^4+2x^2+1}\, dx$

6) $\int \frac{x^3}{x^4+1}\, dx + \int \frac{x}{x^4+1}\, dx$

7) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 1}\, dx$

8) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\, dx$

10) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx$ — сложнее

11) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx$

12) $\int \frac{\cos 2x}{1+\cos^2 x}\, dx$

Замена переменной в общем случае

Теория

В этой главе мы рассмотрим метод замены переменной в самом общем виде. Это один из самых мощных приёмов интегрирования — он позволяет свести сложный интеграл к табличному с помощью подходящей замены.

Основная идея: Вместо того чтобы интегрировать по переменной x, мы вводим новую переменную $t = \varphi(x)$, выражаем всё через t и dt, а после интегрирования возвращаемся к x.

Алгоритм:

1. Выбираем подходящую замену $t = \varphi(x)$
2. Находим дифференциал: $dt = \varphi'(x)dx$, откуда $dx = \dfrac{dt}{\varphi'(x)}$
3. Выражаем всё подынтегральное выражение через t и dt
4. Берём полученный интеграл (он должен стать проще)
5. Возвращаемся к переменной x (подставляем $t = \varphi(x)$)

Как выбирать замену?

- Если под интегралом есть $\sqrt{ax+b}$, можно попробовать $t = \sqrt{ax+b}$
- Если есть e^x, можно попробовать $t = e^x$
- Если есть $\ln x$, можно попробовать $t = \ln x$
- Если есть сложная функция, можно попробовать заменить её аргумент

Опыт приходит с практикой. Начнём с простых примеров.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Замена $t = \sqrt{x}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

Этот интеграл не берётся напрямую. Сделаем замену $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int \frac{t}{1+t}\,dt$$

Теперь нужно преобразовать дробь: $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$. Получаем:

$$2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2(t - \ln|1+t|) + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

Пример 2

Замена $t = \sqrt[3]{x}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1}$$

Сделаем замену $t = \sqrt[3]{x}$, тогда $x = t^3$, $dx = 3t^2dt$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1} = \int \frac{3t^2dt}{t-1}$$

Делим числитель на знаменатель: $3t^2 = 3(t^2-1)+3 = 3(t-1)(t+1)+3$, но проще выделить целую часть делением уголком: $3t^2 : (t-1) = 3t+3+\dfrac{3}{t-1}$. Проверим: $(3t+3)(t-1) = 3t^2-3t+3t-3 = 3t^2-3$, остаётся

+3, значит:

$$\frac{3t^2}{t-1} = 3t + 3 + \frac{3}{t-1}$$

Тогда:

$$\int \left(3t + 3 + \frac{3}{t-1}\right) dt = \frac{3t^2}{2} + 3t + 3\ln|t-1| + C = \frac{3x^{2/3}}{2} + 3x^{1/3} + 3\ln|x^{1/3} - 1| + C$$

Пример 3

Замена $t = \sqrt{ax+b}$

Вычислите интеграл:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx$$

Сделаем замену $t = \sqrt{x+1}$, тогда $x + 1 = t^2$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t\,dt$:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)\cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int (t^4 - t^2)dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$$

Пример 4

Замена $t = e^x$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$

Сделаем замену $t = e^x$, тогда $dt = e^x dx$, значит $e^x dx = dt$:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

Пример 5

Замена $t = \ln x$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{x\ln x}$$

Сделаем замену $t = \ln x$, тогда $dt = \dfrac{dx}{x}$:

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$$

Пример 6

Замена $t = \sin x$

Вычислите интеграл:

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx$$

Сделаем замену $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x\,dx$:

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

Пример 7

Замена $t = \operatorname{tg} x$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)}$$

Сделаем замену $t = \operatorname{tg} x$, тогда $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln|1+\operatorname{tg} x| + C$$

Пример 8

Замена $t = x^2$

Вычислите интеграл:

$$\int xe^{x^2}\,dx$$

Этот интеграл мы уже брали подведением под дифференциал. Но можно и формальной заменой: $t = x^2$, $dt = 2xdx$, значит $xdx = dt/2$:

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Пример 9

Проверка дифференцированием

Проверим пример 1. Функция $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})$ — это громоздко, но можно проверить численно или поверить математикам. Главное — алгоритм верный.

Задачи

1. Замена $t = \sqrt{x}$ или $t = \sqrt[3]{x}$:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1}$

5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$

8) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

9) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

10) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

12) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

2. Замена $t = e^x$:

1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

7) $\displaystyle\int e^x\sin(e^x)\,dx$

8) $\displaystyle\int e^x\cos(e^x)\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

3. Замена $t = \ln x$:

1) $\int \frac{dx}{x\ln x}$

2) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

3) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

4) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

5) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

6) $\int \frac{dx}{x(1-\ln x)}$

7) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ — здесь другая замена

8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

9) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

4. Тригонометрические замены:

1) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$

2) $\int \cos^3 x\sin x\,dx$

3) $\int \sin^4 x\cos x\,dx$

4) $\int \cos^4 x\sin x\,dx$

5) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

6) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

7) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

8) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$

5. Разные замены:

1) $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ — проще подведением

2) $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

3) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ — замена $t=x^2$

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ — замена $t=\sqrt{x^2-1}$

5) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

8) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$ — проще подведением

9) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ — замена $t=x^2$

10) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx$ — замена $t=x^4$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$

6. Сложные замены (для тех, кто хочет больше):

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$

3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

5) $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^{-x/2}}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$ — выделение полного квадрата

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3x+1}}$ — потом

9) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ — замена $x=\operatorname{tg} t$

10) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ — замена $x=\sin t$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ — замена $x=\operatorname{sh} t$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ — замена $x=\operatorname{ch} t$

Практика по блоку 4

Теория

В этом блоке мы изучили два важных метода интегрирования:

- **Подведение под знак дифференциала** — когда мы замечаем под интегралом функцию и её производную:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

- **Замена переменной в общем случае** — когда мы явно вводим новую переменную $t = \varphi(x)$ и выражаем всё через t и dt.

Оба метода делают одно и то же, просто подведение под дифференциал — это сокращённая запись замены. В этом блоке мы научились распознавать ситуации, когда нужно применить тот или иной приём.

В этой главе собраны задачи на оба метода вперемешку, а также с предыдущими темами.

Задачи

1. Определите, какой метод нужно применить (подведение или замену):

1) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

3) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

4) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

8) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1}$

10) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

2. Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\,dx$

2) $\displaystyle\int 3x^2e^{x^3}\,dx$

3) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,dx$

5) $\displaystyle\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$

6) $\displaystyle\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

9) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$

10) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$

3. Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

8) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

11) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$ — сложнее

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ — сложнее

4. Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

5) $\displaystyle\int e^x\sin(e^x)dx$

6) $\displaystyle\int e^x\cos(e^x)dx$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

9) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$

10) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

12) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

5. Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$

2) $\displaystyle\int \cos^3 x\sin x\,dx$

3) $\displaystyle\int \sin^4 x\cos x\,dx$

4) $\displaystyle\int \cos^4 x\sin x\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}}$

11) $\displaystyle\int \sin 2x\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

12) $\displaystyle\int \cos 2x\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

6. Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

9) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$

7. Вычислите интегралы (смешанные со всеми предыдущими темами):

1) $\displaystyle\int \left(2xe^{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$

2) $\displaystyle\int \left(\frac{2x}{x^2+1}+\sin x\right)dx$

3) $\int \left(\frac{dx}{1+\sqrt{x}} + \frac{dx}{x}\right)$

4) $\int \left(x\sqrt{x+1} + e^{2x}\right) dx$

5) $\int \left(\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

6) $\int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x \ln x}\right) dx$

7) $\int (\sin^3 x \cos x + \cos 2x)\, dx$

8) $\int \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$

9) $\int \left((2x+1)^3 + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right) dx$

10) $\int \left(\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} + \frac{dx}{x}\right)$

11) $\int \left(\frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

12) $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\, dx$

Интегрирование по частям: степень и экспонента

Теория

В этой главе мы познакомимся с ещё одним мощным методом интегрирования — формулой интегрирования по частям. Этот метод позволяет брать интегралы от произведений функций.

Запомните формулу:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Что означают эти знаки?

- u и v — функции от x
- dv — дифференциал функции v (то есть $v'(x)dx$)
- du — дифференциал функции u (то есть $u'(x)dx$)

Как выбирать u и dv? Для произведений вида $x^n \cdot e^{kx}$ есть простое правило:

- За u берём степень x^n (потому что при дифференцировании степень понижается)
- За dv берём $e^{kx}dx$ (потому что это легко интегрируется)

Алгоритм:

1. Выбираем u и dv
2. Находим $du = u'dx$ и $v = \int dv$
3. Подставляем в формулу $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
4. Берём получившийся интеграл (он должен быть проще исходного)

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Интеграл $\int xe^x dx$

Вычислите интеграл:

$$\int xe^x\,dx$$

Выбираем:

- $u = x$ (степень, будем дифференцировать)
- $dv = e^x dx$ (экспонента, будем интегрировать)

Тогда:

- $du = dx$
- $v = \int e^x dx = e^x$

Подставляем в формулу:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Пример 2

Интеграл $\int xe^{2x} dx$

Вычислите интеграл:

$$\int xe^{2x}\,dx$$

Выбираем:

- $u = x$

- $dv = e^{2x}dx$

Тогда:

- $du = dx$
- $v = \int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}$

Подставляем:

$$\int xe^{2x}\,dx = x\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$
$$= \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + C$$

Пример 3

Интеграл $\int x^2e^xdx$

Вычислите интеграл:

$$\int x^2e^x\,dx$$

Выбираем:

- $u = x^2$
- $dv = e^xdx$

Тогда:

- $du = 2xdx$
- $v = e^x$

Подставляем:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int e^x\cdot 2x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$$

Интеграл $\int xe^xdx$ мы уже знаем из примера 1. Подставляем:

$$= x^2e^x - 2(e^x(x-1)) + C = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2-2x+2) + C$$

Пример 4

Интеграл $\int(2x+1)e^xdx$

Вычислите интеграл:

$$\int(2x+1)e^x\,dx$$

Выбираем:

- $u = 2x+1$
- $dv = e^xdx$

Тогда:

- $du = 2dx$
- $v = e^x$

Подставляем:

$$\int(2x+1)e^x\,dx = (2x+1)e^x - \int e^x\cdot 2\,dx = (2x+1)e^x - 2\int e^x\,dx =$$
$$= (2x+1)e^x - 2e^x + C = e^x(2x+1-2) + C = e^x(2x-1) + C$$

Пример 5

Интеграл $\int xe^{-x}dx$

Вычислите интеграл:

$$\int xe^{-x}\,dx$$

Выбираем:

- $u = x$
- $dv = e^{-x} dx$

Тогда:

- $du = dx$
- $v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$

Подставляем:

$$\int xe^{-x}\, dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx =$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

Пример 6

Интеграл $\int x^2 e^{2x} dx$

Вычислите интеграл:

$$\int x^2 e^{2x}\, dx$$

Выбираем:

- $u = x^2$
- $dv = e^{2x} dx$

Тогда:

- $du = 2x dx$
- $v = \frac{e^{2x}}{2}$

Подставляем:

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 2x\, dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int xe^{2x}\, dx$$

Интеграл $\int xe^{2x} dx$ мы знаем из примера 2. Подставляем:

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left(\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right) + C = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C =$$

$$= \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 1) + C$$

Пример 7

Интеграл $\int x^3 e^x dx$

Вычислите интеграл:

$$\int x^3 e^x\, dx$$

Выбираем:

- $u = x^3$
- $dv = e^x dx$

Тогда:

- $du = 3x^2 dx$
- $v = e^x$

Подставляем:

$$\int x^3 e^x\, dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x\, dx$$

Интеграл $\int x^2 e^x dx$ мы знаем из примера 3. Подставляем:

$$= x^3 e^x - 3 \cdot e^x(x^2 - 2x + 2) + C = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

Пример 8

Проверка дифференцированием

Проверим пример 1. Берём производную от $e^x(x-1)+C$:

$$(e^x)'(x-1)+e^x(x-1)'=e^x(x-1)+e^x\cdot 1=e^x(x-1+1)=xe^x$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы:

1) $\int xe^x\,dx$
2) $\int xe^{2x}\,dx$
3) $\int xe^{3x}\,dx$
4) $\int xe^{-x}\,dx$
5) $\int xe^{-2x}\,dx$
6) $\int xe^{0.5x}\,dx$
7) $\int x^2e^x\,dx$
8) $\int x^2e^{2x}\,dx$
9) $\int x^2e^{-x}\,dx$
10) $\int x^3e^x\,dx$
11) $\int x^3e^{2x}\,dx$
12) $\int x^4e^x\,dx$

2. Вычислите интегралы:

1) $\int (2x+1)e^x\,dx$
2) $\int (3x-2)e^x\,dx$
3) $\int (4x+3)e^{2x}\,dx$
4) $\int (5x-1)e^{3x}\,dx$
5) $\int (x+2)e^{-x}\,dx$
6) $\int (2x-3)e^{-2x}\,dx$
7) $\int (1-2x)e^x\,dx$
8) $\int (3-4x)e^{2x}\,dx$
9) $\int (ax+b)e^{kx}\,dx$ — общая формула

3. Вычислите интегралы:

1) $\int 2xe^x\,dx$
2) $\int 3xe^{2x}\,dx$
3) $\int 4xe^{-x}\,dx$
4) $\int 5x^2e^x\,dx$
5) $\int 2x^2e^{3x}\,dx$
6) $\int 3x^3e^{-x}\,dx$
7) $\int \frac{1}{2}xe^x\,dx$
8) $\int \frac{1}{3}xe^{2x}\,dx$
9) $\int \frac{2}{3}x^2e^x\,dx$

4. Вычислите интегралы:

1) $\int xe^{x^2}\,dx$
2) $\int x^2e^{x^3}\,dx$
3) $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx$
4) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
5) $\int \ln x\,dx$
6) $\int x\ln x\,dx$
7) $\int e^x\sin x\,dx$
8) $\int e^x\cos x\,dx$

5. Вычислите интегралы:

1) $\int x^3e^{-x}\,dx$
2) $\int x^4e^{2x}\,dx$
3) $\int (x^2+2x+1)e^x\,dx$
4) $\int (x^3-3x^2+3x-1)e^x\,dx$

5) $\int xe^x \cos x \, dx$

6) $\int xe^x \sin x \, dx$

7) $\int x^2 e^x \sin x \, dx$

8) $\int (ax^2 + bx + c)e^{kx} \, dx$

6. Вычислите интегралы:

1) $\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$

2) $\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

3) $\int x^3 e^x dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

4) $\int x^4 e^x dx = ?$

5) $\int xe^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + C$

6) $\int x^2 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 1) + C$

7) $\int x^3 e^{2x} dx = ?$

8) $\int xe^{kx} dx = ?$

Интегрирование по частям: логарифмы и обратные функции

Теория

В этой главе мы продолжим осваивать метод интегрирования по частям, но теперь для других типов функций — логарифмов и обратных тригонометрических функций.

Напомним формулу:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Как выбирать u и dv для логарифмов? Для интегралов вида $\int \ln x\,dx$, $\int x^n \ln x\,dx$ и подобных:

- За u берём логарифм (потому что он упрощается при дифференцировании)
- За dv берём всё остальное (потому что это легко интегрируется)

Для обратных тригонометрических функций ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$) — то же самое: их производные — алгебраические функции, которые проще исходных.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Интеграл $\int \ln x\,dx$

Вычислите интеграл:

$$\int \ln x\,dx$$

Выбираем:

- $u = \ln x$ (логарифм, будем дифференцировать)
- $dv = dx$ (всё остальное, будем интегрировать)

Тогда:

- $du = \frac{1}{x}dx$
- $v = x$

Подставляем в формулу:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C$$

Пример 2

Интеграл $\int x\ln x\,dx$

Вычислите интеграл:

$$\int x\ln x\,dx$$

Выбираем:

- $u = \ln x$
- $dv = x\,dx$

Тогда:

- $du = \frac{1}{x}dx$
- $v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

Подставляем:

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$$

Пример 3

Интеграл $\int x^2\ln x\,dx$

Вычислите интеграл:

$$\int x^2\ln x\,dx$$

Выбираем:

- $u = \ln x$
- $dv = x^2\,dx$

Тогда:

- $du = \frac{1}{x}dx$
- $v = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

Подставляем:

$$\int x^2\ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx =$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + C$$

Пример 4

Интеграл $\int \ln^2 x\,dx$

Вычислите интеграл:

$$\int \ln^2 x\,dx$$

Выбираем:

- $u = \ln^2 x$
- $dv = dx$

Тогда:

- $du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{2\ln x}{x}dx$
- $v = x$

Подставляем:

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - \int x\cdot\frac{2\ln x}{x}\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx$$

Интеграл $\int \ln x\,dx$ мы знаем из примера 1. Подставляем:

$$= x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$$

Пример 5

Интеграл $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

Вычислите интеграл:

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx$$

Выбираем:

- $u = \operatorname{arctg} x$
- $dv = dx$

Тогда:

- $du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$
- $v = x$

Подставляем:

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

Интеграл $\int \dfrac{x}{1+x^2}dx$ берётся подведением под дифференциал:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Таким образом:

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Пример 6

Интеграл $\int \arcsin x\, dx$

Вычислите интеграл:

$$\int \arcsin x\, dx$$

Выбираем:

- $u = \arcsin x$
- $dv = dx$

Тогда:

- $du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
- $v = x$

Подставляем:

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Интеграл $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ берётся подведением под дифференциал:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Таким образом:

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Пример 7

Интеграл $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$

Вычислите интеграл:

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$$

Сначала сделаем замену $t = \sqrt{x}$, тогда $x = t^2$, $dx = 2t dt$:

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx = \int \operatorname{arctg} t \cdot 2t\, dt = 2\int t \operatorname{arctg} t\, dt$$

Теперь интегрируем по частям:

- $u = \operatorname{arctg} t$
- $dv = t\, dt$

Тогда:

- $du = \dfrac{1}{1+t^2}dt$

- $v = \dfrac{t^2}{2}$

Подставляем:

$$\int t \operatorname{arctg} t \, dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} \, dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{1+t^2} \, dt$$

Преобразуем дробь: $\dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$. Тогда:

$$\int \frac{t^2}{1+t^2} \, dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = t - \operatorname{arctg} t + C$$

Возвращаемся:

$$\int t \operatorname{arctg} t \, dt = \frac{t^2}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}(t - \operatorname{arctg} t) + C = \frac{t^2}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{2}(t^2 \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} t - t) + C$$

Умножаем на 2 (из замены):

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx = 2 \cdot \frac{1}{2}(t^2 \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} t - t) + C = t^2 \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} t - t + C =$$

$$= x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

Пример 8

Проверка дифференцированием

Проверим пример 1. Берём производную от $x \ln x - x + C$:

$$(x \ln x)' - 1 = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы (натуральный логарифм):

1) $\int \ln x \, dx$
2) $\int \ln 2x \, dx$
3) $\int \ln 3x \, dx$
4) $\int \ln(x+1) \, dx$
5) $\int \ln(2x-1) \, dx$
6) $\int \ln(x^2) \, dx$
7) $\int x \ln x \, dx$
8) $\int x \ln 2x \, dx$
9) $\int x \ln(x+1) \, dx$
10) $\int x^2 \ln x \, dx$
11) $\int x^3 \ln x \, dx$
12) $\int x^n \ln x \, dx$ — общая формула

2. Вычислите интегралы (степени логарифма):

1) $\int \ln^2 x \, dx$
2) $\int \ln^3 x \, dx$
3) $\int \ln^4 x \, dx$
4) $\int x \ln^2 x \, dx$
5) $\int x \ln^3 x \, dx$
6) $\int x^2 \ln^2 x \, dx$
7) $\int \dfrac{\ln x}{x} \, dx$ — это не по частям, а подведение
8) $\int \dfrac{\ln^2 x}{x} \, dx$ — тоже подведение
9) $\int \dfrac{\ln x}{x^2} \, dx$ — а вот это по частям

3. Вычислите интегралы (арктангенс):

1) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$

2) $\int \operatorname{arctg} 2x\, dx$

3) $\int \operatorname{arctg}(x+1)\, dx$

4) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$

5) $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx$

6) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx$

7) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx$

8) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$

9) $\int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$

4. Вычислите интегралы (арксинус и арккосинус):

1) $\int \arcsin x\, dx$

2) $\int \arccos x\, dx$

3) $\int \arcsin 2x\, dx$

4) $\int \arccos 2x\, dx$

5) $\int x \arcsin x\, dx$

6) $\int x \arccos x\, dx$

7) $\int x^2 \arcsin x\, dx$

8) $\int \arcsin \sqrt{x}\, dx$

9) $\int \arccos \sqrt{x}\, dx$

5. Вычислите интегралы (смешанные с предыдущими темами):

1) $\int (\ln x + e^x)\, dx$

2) $\int (x \ln x + x e^x)\, dx$

3) $\int (\operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$

4) $\int (\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\, dx$

5) $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

6) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx$

7) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx$

8) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx$ — сложнее

9) $\int \ln^2 x\, dx + \int \ln x\, dx$

10) $\int (x^2 \ln x + x \ln x)\, dx$

11) $\int \ln(\ln x)\, dx$ — очень сложно

12) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ — по частям

6. Найдите ошибку (в каждом примере что-то не так):

1) $\int \ln x dx = x \ln x + x + C$ (знак)

2) $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$ — правильно!

3) $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C$ (знак)

4) $\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ (знак)

5) $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$ — правильно!

6) $\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x - 2x + C$ (знак)

Интегрирование по частям: циклические интегралы

Теория

В этой главе мы рассмотрим особый тип интегралов, которые берутся двукратным (или многократным) применением формулы интегрирования по частям, после чего исходный интеграл снова появляется в правой части. Такие интегралы называют циклическими.

Типичные представители:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx, \quad \int e^{ax}\cos(bx)\,dx, \quad \int \sin(\ln x)\,dx, \quad \int \cos(\ln x)\,dx$$

Алгоритм решения:

1. Применяем интегрирование по частям 2 раза
2. В правой части снова появляется исходный интеграл
3. Переносим его в левую часть и выражаем искомый интеграл

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Интеграл $\int e^x \sin x\,dx$

Вычислите интеграл:

$$I = \int e^x \sin x\,dx$$

Применим интегрирование по частям. Выберем:

- $u = \sin x$ (будем дифференцировать)
- $dv = e^x dx$ (будем интегрировать)

Тогда:

- $du = \cos x\,dx$
- $v = e^x$

Подставляем:

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

Теперь применим по частям к интегралу $\int e^x \cos x\,dx$:

- $u = \cos x$
- $dv = e^x dx$

Тогда:

- $du = -\sin x\,dx$
- $v = e^x$

Подставляем:

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx = e^x \cos x + I$$

Возвращаемся к исходному выражению:

$$I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

Переносим I в левую часть:

$$I + I = e^x(\sin x - \cos x)$$
$$2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

Пример 2

Интеграл $\int e^x \cos x\,dx$

Вычислите интеграл:

$$J = \int e^x \cos x\,dx$$

Можно действовать аналогично или воспользоваться результатом примера 1. Мы уже получили, что:

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + I = e^x \cos x + \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C =$$

$$= \frac{e^x}{2}(2\cos x + \sin x - \cos x) + C = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

Пример 3

Интеграл $\int e^{2x} \sin 3x\,dx$

Вычислите интеграл:

$$I = \int e^{2x} \sin 3x\,dx$$

Применим по частям:

- $u = \sin 3x$
- $dv = e^{2x} dx$

Тогда:

- $du = 3\cos 3x\,dx$
- $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$

Подставляем:

$$I = \frac{e^{2x}}{2}\sin 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 3\cos 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$$

Обозначим $J = \int e^{2x}\cos 3x\,dx$. Теперь вычислим J по частям:

- $u = \cos 3x$
- $dv = e^{2x} dx$

Тогда:

- $du = -3\sin 3x\,dx$
- $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$

Подставляем:

$$J = \frac{e^{2x}}{2}\cos 3x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot (-3\sin 3x)\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\cos 3x + \frac{3}{2}I$$

Теперь подставим J в выражение для I:

$$I = \frac{e^{2x}}{2}\sin 3x - \frac{3}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2}\cos 3x + \frac{3}{2}I\right) = \frac{e^{2x}}{2}\sin 3x - \frac{3e^{2x}}{4}\cos 3x - \frac{9}{4}I$$

Переносим I в левую часть:

$$I + \frac{9}{4}I = \frac{e^{2x}}{2}\sin 3x - \frac{3e^{2x}}{4}\cos 3x$$

$$\frac{13}{4}I = \frac{e^{2x}}{4}(2\sin 3x - 3\cos 3x)$$

$$I = \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C$$

Пример 4

Интеграл $\int \sin(\ln x)\,dx$

Вычислите интеграл:

$$I = \int \sin(\ln x)\, dx$$

Сделаем замену $t = \ln x$, тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$:

$$I = \int \sin t \cdot e^t\, dt = \int e^t \sin t\, dt$$

А это интеграл из примера 1! Значит:

$$I = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

Пример 5

Интеграл $\int \cos(\ln x)\, dx$

Вычислите интеграл:

$$I = \int \cos(\ln x)\, dx$$

Аналогично, замена $t = \ln x$ даёт:

$$I = \int \cos t \cdot e^t\, dt = \int e^t \cos t\, dt = \frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$$

Пример 6

Интеграл $\int e^{ax} \sin(bx)\, dx$ — общая формула

Можно вывести общую формулу:

$$\int e^{ax} \sin(bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C$$

Проверьте самостоятельно, подставив $a = 1, b = 1$ — получится $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$, что совпадает с примером 1.

Пример 7

Интеграл $\int e^{ax} \cos(bx)\, dx$ — общая формула

Аналогично:

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C$$

Пример 8

Проверка дифференцированием

Проверим пример 1. Берём производную от $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$:

$$\frac{1}{2}\left[e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)\right] = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x + \cos x + \sin x) = \frac{e^x}{2} \cdot 2 \sin x = e^x \sin x$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы (экспонента и синус/косинус):

1) $\int e^x \sin x\, dx$

2) $\int e^x \cos x\, dx$

3) $\int e^{2x} \sin x\, dx$

4) $\int e^{2x} \cos x\, dx$

5) $\int e^x \sin 2x \, dx$

6) $\int e^x \cos 2x \, dx$

7) $\int e^{3x} \sin 2x \, dx$

8) $\int e^{3x} \cos 2x \, dx$

9) $\int e^{-x} \sin x \, dx$

10) $\int e^{-x} \cos x \, dx$

11) $\int e^{0.5x} \sin 0.5x \, dx$

12) $\int e^{0.5x} \cos 0.5x \, dx$

2. Вычислите интегралы (логарифм в аргументе тригонометрических функций):

1) $\int \sin(\ln x) \, dx$

2) $\int \cos(\ln x) \, dx$

3) $\int \sin(2 \ln x) \, dx$

4) $\int \cos(2 \ln x) \, dx$

5) $\int x \sin(\ln x) \, dx$ — сложнее

6) $\int x \cos(\ln x) \, dx$ — сложнее

7) $\int \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx$ — это подведение

8) $\int \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx$ — тоже подведение

3. Вычислите интегралы (разные коэффициенты):

1) $\int e^x \sin 3x \, dx$

2) $\int e^x \cos 3x \, dx$

3) $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$

4) $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$

5) $\int e^{3x} \sin 4x \, dx$

6) $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$

7) $\int e^{4x} \sin 2x \, dx$

8) $\int e^{4x} \cos 2x \, dx$

9) $\int e^{-2x} \sin 3x \, dx$

10) $\int e^{-2x} \cos 3x \, dx$

11) $\int e^{-x} \sin 2x \, dx$

12) $\int e^{-x} \cos 2x \, dx$

4. Вычислите интегралы (сводящиеся к циклическим заменой):

1) $\int \sin(\ln x) \, dx$

2) $\int \cos(\ln x) \, dx$

3) $\int \sin(\ln \sqrt{x}) \, dx$

4) $\int \cos(\ln \sqrt{x}) \, dx$

5) $\int e^{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \, dx$

6) $\int e^{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \, dx$

7) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$

8) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$

5. Вычислите интегралы (проверка общих формул):

1) $\int e^{ax} \sin(bx) \, dx$

2) $\int e^{ax} \cos(bx) \, dx$

3) $\int e^{2x} \sin 2x \, dx$

4) $\int e^{2x} \cos 2x \, dx$

5) $\int e^{3x} \sin 3x \, dx$

6) $\int e^{3x} \cos 3x \, dx$

7) $\int e^{-x} \sin x \, dx$

8) $\int e^{-x} \cos x \, dx$

Практика по блоку 5

Теория

В этом блоке мы изучили метод интегрирования по частям в трёх основных вариантах:

- **Степень и экспонента:** $\int x^n e^{kx}\,dx$ — за u берём x^n
- **Логарифмы и обратные функции:** $\int \ln x\,dx$, $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ — за u берём логарифм или обратную функцию
- **Циклические интегралы:** $\int e^{ax}\sin(bx)dx$, $\int e^{ax}\cos(bx)dx$ — дважды по частям с возвратом исходного интеграла

Во всех случаях формула одна:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Важно только правильно выбрать u и dv.

В этой главе собраны задачи на все три типа интегралов по частям вперемешку.

Задачи

1. Вычислите интегралы (степень и экспонента):

1) $\int xe^x\,dx$
2) $\int xe^{2x}\,dx$
3) $\int xe^{-x}\,dx$
4) $\int x^2e^x\,dx$
5) $\int x^2e^{2x}\,dx$
6) $\int x^2e^{-x}\,dx$
7) $\int x^3e^x\,dx$
8) $\int (2x+1)e^x\,dx$
9) $\int (3x-2)e^{2x}\,dx$

2. Вычислите интегралы (логарифмы):

1) $\int \ln x\,dx$
2) $\int \ln 2x\,dx$
3) $\int \ln(x+1)\,dx$
4) $\int x\ln x\,dx$
5) $\int x\ln 2x\,dx$
6) $\int x^2\ln x\,dx$
7) $\int \ln^2 x\,dx$
8) $\int \ln^3 x\,dx$
9) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

3. Вычислите интегралы (обратные тригонометрические):

1) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$
2) $\int \operatorname{arctg} 2x\,dx$
3) $\int \arcsin x\,dx$
4) $\int \arccos x\,dx$
5) $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$
6) $\int x\arcsin x\,dx$
7) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$
8) $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$
9) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$

4. Вычислите интегралы (циклические):

1) $\int e^x\sin x\,dx$
2) $\int e^x\cos x\,dx$

3) $\int e^{2x}\sin x\,dx$

4) $\int e^{2x}\cos x\,dx$

5) $\int e^{x}\sin 2x\,dx$

6) $\int e^{x}\cos 2x\,dx$

7) $\int e^{3x}\sin 2x\,dx$

8) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$

9) $\int \sin(\ln x)\,dx$

10) $\int \cos(\ln x)\,dx$

11) $\int e^{-x}\sin x\,dx$

12) $\int e^{-x}\cos x\,dx$

5. Вычислите интегралы (смешанные):

1) $\int (\ln x + e^x)\,dx$

2) $\int (x\ln x + xe^x)\,dx$

3) $\int (\operatorname{arctg} x + \sin x)\,dx$

4) $\int (xe^x + e^x\sin x)\,dx$

5) $\int (\ln^2 x + \ln x)\,dx$

6) $\int (x^2e^x + x\ln x)\,dx$

7) $\int (e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x)\,dx$

8) $\int (\arcsin x + \arccos x)\,dx$

9) $\int \left(\frac{\ln x}{x} + x\ln x\right)dx$

10) $\int (e^x\sin x + e^x\cos x)\,dx$

11) $\int \left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

12) $\int \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

6. Определите, какой метод нужно применить:

1) $\int xe^{x^2}dx$

2) $\int xe^{x}dx$

3) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

4) $\int \ln x\,dx$

5) $\int e^x\sin x\,dx$

6) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

7) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

8) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$

9) $\int x^2e^{x^3}dx$

10) $\int x^2e^{x}dx$

11) $\int \frac{dx}{x\ln x}$

12) $\int \ln(\ln x)\,dx$

Простейшие рациональные дроби

Теория

В этой главе мы научимся интегрировать рациональные дроби — дроби вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Основная идея: Любую правильную рациональную дробь (степень числителя меньше степени знаменателя) можно разложить на сумму простейших дробей вида:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

Простейший случай: знаменатель раскладывается на линейные множители. Если $Q(x) = (x - a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, то:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

Коэффициенты A_i находятся методом неопределённых коэффициентов.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Дробь $\dfrac{1}{x(x-1)}$

Разложите дробь и вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)}$$

Ищем разложение в виде:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

Приводим к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x-A}{x(x-1)}$$

Числители равны при всех x:

$$1 = (A+B)x - A$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

Отсюда $A=-1$, $B=1$. Значит:

$$\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

Теперь интегрируем:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} = -\ln|x| + \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

Пример 2

Дробь $\dfrac{2x+3}{x^2+5x+6}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+5x+6}\,dx$$

Разложим знаменатель на множители: $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$. Ищем разложение:

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$$

Приводим к общему знаменателю:

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$$

Числители равны:

$$2x+3=(A+B)x+(3A+2B)$$

Приравниваем коэффициенты:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A+2B=3 \end{cases}$$

Из первого уравнения $B=2-A$. Подставляем во второе:

$$3A+2(2-A)=3\Rightarrow 3A+4-2A=3\Rightarrow A+4=3\Rightarrow A=-1$$

Тогда $B=2-(-1)=3$.

Значит:

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6}=-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}$$

Интегрируем:

$$\int\frac{2x+3}{x^2+5x+6}\,dx=-\int\frac{dx}{x+2}+3\int\frac{dx}{x+3}=-\ln|x+2|+3\ln|x+3|+C=\ln\left|\frac{(x+3)^3}{x+2}\right|+C$$

Пример 3

Дробь $\dfrac{x+1}{x^2-4}$

Вычислите интеграл:

$$\int\frac{x+1}{x^2-4}\,dx$$

Разложим знаменатель: $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Ищем разложение:

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

Приводим к общему знаменателю:

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-2B)}{(x-2)(x+2)}$$

Числители равны:

$$x+1=(A+B)x+(2A-2B)$$

Приравниваем коэффициенты:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-2B=1 \end{cases}$$

Из первого уравнения $B=1-A$. Подставляем во второе:

$$2A-2(1-A)=1\Rightarrow 2A-2+2A=1\Rightarrow 4A=3\Rightarrow A=\frac{3}{4}$$

Тогда $B=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$.

Значит:

$$\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{3/4}{x-2}+\frac{1/4}{x+2}$$

Интегрируем:

$$\int\frac{x+1}{x^2-4}\,dx=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}=\frac{3}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+C=\ln\left(|x-2|^{3/4}|x+2|^{1/4}\right)+C$$

Пример 4

Повторяющийся множитель $(x-a)^2$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1}$$

Заметим, что $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Здесь разложение будет другого вида:

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Приводим к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax + (B-A)}{(x-1)^2}$$

Числители равны:

$$1 = Ax + (B - A)$$

Приравниваем коэффициенты:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B - A = 1 \end{cases}$$

Отсюда $A = 0$, $B = 1$. Значит:

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int (x-1)^{-2} dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-1} + C$$

Пример 5

Дробь $\frac{2x+3}{x^2+6x+9}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+6x+9}\,dx$$

Заметим, что $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. Ищем разложение:

$$\frac{2x+3}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

Приводим к общему знаменателю:

$$\frac{2x+3}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2} = \frac{Ax + (3A+B)}{(x+3)^2}$$

Числители равны:

$$2x + 3 = Ax + (3A + B)$$

Приравниваем коэффициенты:

$$\begin{cases} A = 2 \\ 3A + B = 3 \end{cases}$$

Отсюда $A = 2$, $3 \cdot 2 + B = 3 \Rightarrow B = 3 - 6 = -3$.
Значит:

$$\frac{2x+3}{(x+3)^2} = \frac{2}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{2x+3}{(x+3)^2}\,dx = 2\int \frac{dx}{x+3} - 3\int (x+3)^{-2} dx = 2\ln|x+3| - 3 \cdot \frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= 2\ln|x+3| + \frac{3}{x+3} + C$$

Пример 6

Проверка дифференцированием

Проверим пример 1. Берём производную от $\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+C$:

$$(\ln|x-1|-\ln|x|)'=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)}$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы (знаменатель раскладывается на линейные множители):

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x-1)}$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+1)}$

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)(x-2)}$

4) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+2)(x+3)}$

5) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-1}$

6) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-4}$

7) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-9}$

8) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-16}$

9) $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x^2+5x+6}\,dx$

10) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2-4}\,dx$

11) $\displaystyle\int\frac{3x-2}{x^2-x-2}\,dx$

12) $\displaystyle\int\frac{4x+1}{x^2+3x+2}\,dx$

2. Вычислите интегралы (знаменатель — полный квадрат):

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+1}$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-2x+1}$

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+4}$

4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-6x+9}$

5) $\displaystyle\int\frac{2x+1}{(x+1)^2}\,dx$

6) $\displaystyle\int\frac{3x-2}{(x-2)^2}\,dx$

7) $\displaystyle\int\frac{4x+3}{(x+3)^2}\,dx$

8) $\displaystyle\int\frac{5x-4}{(x-4)^2}\,dx$

9) $\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

10) $\displaystyle\int\frac{x}{(x-2)^2}\,dx$

11) $\displaystyle\int\frac{x+2}{(x-1)^2}\,dx$

12) $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx$

3. Вычислите интегралы (смешанные):

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+3x+2}$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+3}$

4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$

5) $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2-3x+2}\,dx$

6) $\displaystyle\int\frac{3x+2}{x^2+4x+3}\,dx$

7) $\displaystyle\int\frac{4x-3}{x^2-5x+6}\,dx$

8) $\displaystyle\int\frac{5x+1}{x^2+5x+6}\,dx$

9) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x}$

10) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-4x}$

11) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+6x+8}$

12) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-8x+15}$

4. Вычислите интегралы (более сложные числители):

1) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)}\,dx$

2) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x(x+1)(x+2)}\,dx$

3) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2-1}\,dx$ (сначала выделить целую часть)

4) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2-4}\,dx$

5) $\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$

6) $\int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx$

7) $\int \frac{2x^3+3x}{x^2-1}\,dx$

8) $\int \frac{3x^3-2x}{x^2-4}\,dx$

9) $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$

10) $\int \frac{dx}{x(x^2-4)}$

11) $\int \frac{dx}{x^3-x}$

12) $\int \frac{dx}{x^3-4x}$

Выделение полного квадрата

Теория

В этой главе мы научимся интегрировать дроби, знаменатель которых — квадратный трёхчлен, не раскладывающийся на линейные множители (дискриминант меньше нуля). Такие интегралы приводятся к арктангенсу с помощью выделения полного квадрата.

Основная идея: Квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ приводится к виду $(x + \frac{p}{2})^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$.

Формулы, которые получаются:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

(последняя формула для случая, когда дискриминант больше нуля, но мы её тоже используем)

Алгоритм:

1. Выделяем полный квадрат в знаменателе
2. Делаем замену $t = x + \frac{p}{2}$
3. Приводим интеграл к табличному виду

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

Выделяем полный квадрат:

$$x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 4x + 4) + 1 = (x + 2)^2 + 1$$

Делаем замену $t = x + 2$, тогда $dt = dx$:

$$\int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x + 2) + C$$

Пример 2

Интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$$

Выделяем полный квадрат:

$$x^2 - 6x + 10 = (x^2 - 6x + 9) + 1 = (x - 3)^2 + 1$$

Замена $t = x - 3$:

$$\int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 1} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x - 3) + C$$

Пример 3

Интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

Выделяем полный квадрат:

$$x^2+2x+5=(x^2+2x+1)+4=(x+1)^2+4$$

Замена $t=x+1$:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}=\int \frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$$

Пример 4

Интеграл $\int \dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx$$

Здесь в числителе стоит линейная функция, а производная знаменателя равна $2x+2$. Выделим производную знаменателя:

$$2x+3=(2x+2)+1$$

Тогда:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx=\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx+\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

Первый интеграл берётся подведением под дифференциал:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx=\int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}=\ln|x^2+2x+2|+C$$

Второй интеграл — с выделением полного квадрата:

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+1)+C$$

Таким образом:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx=\ln|x^2+2x+2|+\operatorname{arctg}(x+1)+C$$

Пример 5

Интеграл $\int \dfrac{dx}{x^2-4x+3}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$$

Здесь дискриминант $D=16-12=4>0$, значит знаменатель раскладывается на множители. Но можно и выделить полный квадрат:

$$x^2-4x+3=(x^2-4x+4)-1=(x-2)^2-1$$

Теперь это интеграл вида $\int \dfrac{dt}{t^2-a^2}$:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2-1}{x-2+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$$

Пример 6

Интеграл $\int \dfrac{x}{x^2+4x+5}\,dx$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$$

Производная знаменателя равна $2x+4$. Выразим числитель через производную:
$$x = \frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(2x+4-4) = \frac{1}{2}(2x+4) - 2$$
Тогда:
$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - 2\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$
Первый интеграл:
$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx = \ln|x^2+4x+5| + C$$
Второй интеграл — с выделением полного квадрата:
$$x^2+4x+5 = (x+2)^2+1$$
$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \operatorname{arctg}(x+2) + C$$
Таким образом:
$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| - 2\operatorname{arctg}(x+2) + C$$

Пример 7

Проверка дифференцированием

Проверим пример 1. Берём производную от $\operatorname{arctg}(x+2)+C$:
$$\frac{1}{1+(x+2)^2}\cdot 1 = \frac{1}{x^2+4x+5}$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы (знаменатель приводится к t^2+a^2):

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ 5) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$ 9) $\int \frac{dx}{x^2-8x+17}$

2) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ 6) $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$ 10) $\int \frac{dx}{x^2-10x+26}$

3) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ 7) $\int \frac{dx}{x^2+8x+17}$ 11) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$

4) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$ 8) $\int \frac{dx}{x^2+10x+26}$ 12) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$

2. Вычислите интегралы (знаменатель приводится к t^2-a^2):

1) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$ 5) $\int \frac{dx}{x^2+6x+5}$ 9) $\int \frac{dx}{x^2-2x-8}$

2) $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$ 6) $\int \frac{dx}{x^2-8x+7}$ 10) $\int \frac{dx}{x^2+2x-8}$

3) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$ 7) $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}$ 11) $\int \frac{dx}{x^2-6x-7}$

4) $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$ 8) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$ 12) $\int \frac{dx}{x^2+6x-7}$

3. Вычислите интегралы (линейный числитель):

1) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$ 2) $\int \frac{2x-1}{x^2-2x+2}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{x^2+6x+10}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{x^2-6x+10}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+5}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

10) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+4x+8}\,dx$

12) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-4x+8}\,dx$

4. Вычислите интегралы (смешанные):

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$

5) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4x+13}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-4x+13}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+10}\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-6x+10}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+20}$

11) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+8x+20}\,dx$

12) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-8x+20}\,dx$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ и $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

Теория

В этой главе мы рассмотрим два важных табличных интеграла, которые часто встречаются на практике. По сути, это частные случаи выделения полного квадрата, но они настолько полезны, что их стоит запомнить отдельно.

Запомните формулы:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

Что означают эти знаки?

- a — положительное число (обычно $a > 0$)
- В первой формуле арктангенс, во второй — логарифм
- Модуль во второй формуле нужен, потому что выражение $\frac{x-a}{x+a}$ может быть отрицательным

Как запомнить:

- $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ — арктангенс, делённый на a
- $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ — логарифм, делённый на $2a$

Эти формулы работают и в более общих случаях, когда вместо x стоит линейное выражение:

$$\int \frac{dx}{(x+b)^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x+b)^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+b-a}{x+b+a}\right| + C$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2+4}$$

Здесь $a^2 = 4$, значит $a = 2$. По формуле:

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

Пример 2

Интеграл $\int \frac{dx}{x^2+9}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2+9}$$

$a = 3$:

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$$

Пример 3

Интеграл $\int \frac{dx}{x^2-4}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2-4}$$

Здесь $a^2 = 4$, значит $a = 2$. По формуле для разности квадратов:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

Пример 4

Интеграл $\int \frac{dx}{x^2-9}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2-9}$$

$a = 3$:

$$\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

Пример 5

Интеграл $\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

Здесь $a = 2$, и вместо x стоит $x+1$. По формуле:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$$

Пример 6

Интеграл $\int \frac{dx}{(x-2)^2-9}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2-9}$$

$a = 3$:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2-9} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{(x-2)-3}{(x-2)+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right| + C$$

Пример 7

Интеграл $\int \frac{dx}{2x^2+8}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{2x^2+8}$$

Сначала вынесем общий множитель:

$$\int \frac{dx}{2x^2+8} = \int \frac{dx}{2(x^2+4)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

Пример 8

Интеграл $\int \frac{dx}{3x^2-12}$

Вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{3x^2-12} = \int \frac{dx}{3(x^2-4)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

Пример 9

Проверка дифференцированием

Проверим пример 1. Берём производную от $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x/2)^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x^2/4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4+x^2} = \frac{1}{x^2+4}$$

Всё верно!

Задачи

1. Вычислите интегралы (сумма квадратов):

1) $\int \frac{dx}{x^2+1}$

2) $\int \frac{dx}{x^2+4}$

3) $\int \frac{dx}{x^2+9}$

4) $\int \frac{dx}{x^2+16}$

5) $\int \frac{dx}{x^2+25}$

6) $\int \frac{dx}{x^2+36}$

7) $\int \frac{dx}{x^2+49}$

8) $\int \frac{dx}{x^2+64}$

9) $\int \frac{dx}{x^2+81}$

10) $\int \frac{dx}{x^2+100}$

11) $\int \frac{dx}{x^2+144}$

12) $\int \frac{dx}{x^2+225}$

2. Вычислите интегралы (разность квадратов):

1) $\int \frac{dx}{x^2-1}$

2) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

3) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

4) $\int \frac{dx}{x^2-16}$

5) $\int \frac{dx}{x^2-25}$

6) $\int \frac{dx}{x^2-36}$

7) $\int \frac{dx}{x^2-49}$

8) $\int \frac{dx}{x^2-64}$

9) $\int \frac{dx}{x^2-81}$

10) $\int \frac{dx}{x^2-100}$

11) $\int \frac{dx}{x^2-144}$

12) $\int \frac{dx}{x^2-225}$

3. Вычислите интегралы (с линейным сдвигом):

1) $\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$

2) $\int \frac{dx}{(x-2)^2+9}$

3) $\int \frac{dx}{(x+3)^2+16}$

4) $\int \frac{dx}{(x-4)^2+25}$

5) $\int \frac{dx}{(x+5)^2+36}$

6) $\int \frac{dx}{(x-6)^2+49}$

7) $\int \frac{dx}{(x+1)^2-4}$

8) $\int \frac{dx}{(x-2)^2-9}$

9) $\int \frac{dx}{(x+3)^2-16}$

10) $\int \frac{dx}{(x-4)^2-25}$

11) $\int \frac{dx}{(x+5)^2-36}$

12) $\int \frac{dx}{(x-6)^2-49}$

4. Вычислите интегралы (с коэффициентами):

1) $\int \frac{dx}{2x^2+8}$

2) $\int \frac{dx}{3x^2+12}$

3) $\int \frac{dx}{4x^2+16}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{5x^2+20}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-8}$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-12}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-16}$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{5x^2-20}$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{2(x+1)^2+8}$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{3(x-2)^2+12}$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{4(x+3)^2-16}$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{5(x-4)^2-20}$

5. Вычислите интегралы (смешанные):

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ (свести к формуле)

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+17}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+26}$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-12x+37}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$ (свести к разности квадратов)

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x-7}$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-10x+21}$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+12x+27}$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-14x+45}$

Практика по блоку 6

Теория

В этом блоке мы изучили интегрирование рациональных дробей:

- **Простейшие дроби с линейными множителями:** разложение вида $\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dots$
- **Повторяющиеся линейные множители:** разложение вида $\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dots$
- **Выделение полного квадрата:** приведение квадратного трёхчлена к виду $(x+p)^2 \pm q^2$
- **Табличные интегралы:** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$ и $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

В этой главе собраны задачи на все эти типы рациональных дробей вперемешку.

Задачи

1. Вычислите интегралы (линейные множители в знаменателе):

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-2)}$
2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+3)}$
3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$
4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+4)}$
5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$
6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$
7) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}\,dx$
8) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+4x+3}\,dx$
9) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+5x+6}\,dx$
10) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-5x+6}\,dx$
11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$
12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$

2. Вычислите интегралы (повторяющиеся линейные множители):

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2}$
2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2}$
3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$
4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$
5) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+1)^2}\,dx$
6) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{(x-2)^2}\,dx$
7) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+3)^2}\,dx$
8) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-4)^2}\,dx$
9) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-1)^2}\,dx$
10) $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x+2)^2}\,dx$
11) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+6x+9}\,dx$
12) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2-8x+16}\,dx$

3. Вычислите интегралы (выделение полного квадрата):

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$
2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$
3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$
4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$
5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$
6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$
7) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$
8) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-2x+2}\,dx$
9) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$
10) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+5}\,dx$
11) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+6x+10}\,dx$
12) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-6x+10}\,dx$

4. Вычислите интегралы (сумма и разность квадратов):

1) $\int \frac{dx}{x^2+4}$

2) $\int \frac{dx}{x^2+9}$

3) $\int \frac{dx}{x^2+16}$

4) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

5) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

6) $\int \frac{dx}{x^2-16}$

7) $\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$

8) $\int \frac{dx}{(x-2)^2+9}$

9) $\int \frac{dx}{(x+3)^2-16}$

10) $\int \frac{dx}{2x^2+8}$

11) $\int \frac{dx}{3x^2-12}$

12) $\int \frac{dx}{4x^2+16}$

5. Вычислите интегралы (смешанные):

1) $\int \frac{x+2}{x^2-4x+3}\,dx$

2) $\int \frac{2x-3}{x^2+2x-3}\,dx$

3) $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+4}\,dx$

4) $\int \frac{dx}{x^3-4x}$

5) $\int \frac{dx}{x^3-9x}$

6) $\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx$

7) $\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{x^4-1}$

9) $\int \frac{dx}{x^4-16}$

10) $\int \frac{x}{x^4-1}\,dx$

11) $\int \frac{x^3}{x^4-1}\,dx$

12) $\int \frac{dx}{x^4+4x^2+4}$

6. Определите, какой метод нужно применить:

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

2) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$

4) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$

5) $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+3}\,dx$

6) $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}\,dx$

7) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

8) $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$

9) $\int \frac{dx}{x^2+9}$

10) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

11) $\int \frac{x}{x^4-1}\,dx$

12) $\int \frac{x^3}{x^4-1}\,dx$

Итоговая практика на все типы неопределённых интегралов

Теория

Поздравляю! Мы прошли все основные методы интегрирования неопределённых интегралов:

- **Табличные интегралы:** степенные, показательные, тригонометрические, обратные тригонометрические
- **Линейность:** интеграл от суммы и вынесение константы
- **Линейная замена:** $\int (ax+b)^n dx$, $\int e^{ax+b} dx$, $\int \sin(ax+b)dx$, $\int \cos(ax+b)dx$
- **Подведение под дифференциал:** $\int f(g(x))g'(x)dx$
- **Замена переменной:** явная замена $t = \varphi(x)$
- **Интегрирование по частям:** $\int u dv = uv - \int v du$
- **Рациональные дроби:** разложение на простейшие, выделение полного квадрата

В этой главе собраны задачи на все эти методы вперемешку. Ваша задача — определить, какой метод нужно применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Вычислите интегралы:

1) $\int x^5\, dx$

2) $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

3) $\int \sqrt{x}\, dx$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

5) $\int \frac{1}{x}\, dx$

6) $\int 2^x\, dx$

7) $\int e^x\, dx$

8) $\int \sin x\, dx$

9) $\int \cos x\, dx$

10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $\int \frac{dx}{1+x^2}$

14) $\int (x^2+x+1)\, dx$

15) $\int (3\sin x - 2\cos x)\, dx$

2. Вычислите интегралы:

1) $\int (2x+1)^4\, dx$

2) $\int (3x-2)^{-3}\, dx$

3) $\int \sqrt{4x+5}\, dx$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\, dx$

5) $\int e^{3x+2}\, dx$

6) $\int e^{-2x+1}\, dx$

7) $\int \sin(4x-1)\, dx$

8) $\int \cos(5x+3)\, dx$

9) $\int \sin(2-3x)\, dx$

10) $\int \cos(1-2x)\, dx$

11) $\int (e^{2x} + \sin 3x)\, dx$

12) $\int ((2x-1)^3 + \cos 4x)\, dx$

3. Вычислите интегралы:

1) $\int 2xe^{x^2}\, dx$

2) $\int xe^{x^2}\, dx$

3) $\int x^2 e^{x^3}\, dx$

4) $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$

5) $\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

6) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

7) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

8) $\int \operatorname{tg} x\,dx$

9) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$

10) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

11) $\int \frac{dx}{x\ln x}$

12) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

4. Вычислите интегралы:

1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

3) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

4) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

5) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

6) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

7) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1}$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

12) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

5. Вычислите интегралы:

1) $\int xe^x\,dx$

2) $\int xe^{2x}\,dx$

3) $\int x^2e^x\,dx$

4) $\int x\ln x\,dx$

5) $\int \ln x\,dx$

6) $\int \ln^2 x\,dx$

7) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

8) $\int \arcsin x\,dx$

9) $\int e^x\sin x\,dx$

10) $\int e^x\cos x\,dx$

11) $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

12) $\int \sin(\ln x)\,dx$

6. Вычислите интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x(x-2)}$

2) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

3) $\int \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$

4) $\int \frac{dx}{(x+1)^2}$

5) $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

6) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

7) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

8) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

9) $\int \frac{dx}{x^2+4}$

10) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

11) $\int \frac{dx}{x^3-4x}$

12) $\int \frac{x}{x^4-1}\,dx$

7. Вычислите интегралы:

1) $\int (x^3-2x^2+5)\,dx$

2) $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

3) $\int x\cos x\,dx$

4) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

6) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$

7) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+3}\,dx$

8) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

9) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

10) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

11) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

12) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

13) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

14) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

15) $\int \frac{dx}{\sin x}$

16) $\int \frac{dx}{\cos x}$

Формула Ньютона-Лейбница

Теория

В этой главе мы переходим от неопределённых интегралов к определённым. Если неопределённый интеграл — это семейство функций, то определённый интеграл — это число.

Определение: Определённый интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ обозначается:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ — любая первообразная для $f(x)$.

Что означают эти знаки?

- a — нижний предел интегрирования
- b — верхний предел интегрирования
- $F(x)$ — первообразная (результат неопределённого интегрирования)
- $F(b) - F(a)$ — приращение первообразной

Обозначение: Часто пишут:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Важно: При вычислении определённого интеграла константа C не нужна — она всё равно сократится:

$$(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Интеграл от степенной функции

Вычислите интеграл:

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Находим первообразную: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Пример 2

Интеграл от $\frac{1}{x}$

Вычислите интеграл:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Первообразная: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$. Подставляем пределы:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$$

Пример 3

Интеграл от синуса

Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$$

Первообразная: $\int \sin x\, dx = -\cos x$. Подставляем:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = (-\cos x)\big|_0^{\pi/2} = (-\cos\frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) = (-0) - (-1) = 1$$

Пример 4

Интеграл с отрицательными значениями

Вычислите интеграл:

$$\int_1^4 (2x-1)\, dx$$

Первообразная: $\int (2x-1)dx = x^2 - x$. Подставляем:

$$\int_1^4 (2x-1)\, dx = (x^2 - x)\big|_1^4 = (16-4) - (1-1) = 12 - 0 = 12$$

Пример 5

Интеграл от экспоненты

Вычислите интеграл:

$$\int_0^1 e^x\, dx$$

Первообразная: $\int e^x dx = e^x$. Подставляем:

$$\int_0^1 e^x\, dx = e^x\big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Пример 6

Интеграл с линейной заменой

Вычислите интеграл:

$$\int_0^1 (2x+1)^3\, dx$$

Сначала найдём первообразную: $\int (2x+1)^3 dx = \dfrac{(2x+1)^4}{2\cdot 4} = \dfrac{(2x+1)^4}{8}$. Подставляем:

$$\int_0^1 (2x+1)^3\, dx = \frac{(2x+1)^4}{8}\bigg|_0^1 = \frac{(2\cdot 1+1)^4}{8} - \frac{(2\cdot 0+1)^4}{8} = \frac{3^4}{8} - \frac{1^4}{8} = \frac{81}{8} - \frac{1}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

Пример 7

Интеграл от суммы

Вычислите интеграл:

$$\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)\, dx$$

Первообразная: $\int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x$. Подставляем:

$$\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)\, dx = (-\cos x + \sin x)\big|_0^{\pi} = (-\cos\pi + \sin\pi) - (-\cos 0 + \sin 0) =$$

$$= (-(-1) + 0) - (-1 + 0) = (1) - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Пример 8

Площадь под графиком

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически означает площадь под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ (если $f(x)\geq 0$).

Например, $\int_0^1 x^2dx = \dfrac{1}{3}$ — это площадь под параболой $y=x^2$ от 0 до 1.

Задачи

1. Вычислите интегралы (степенные функции):

1) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^2 x^3\,dx$

4) $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 x^5\,dx$

6) $\displaystyle\int_0^2 x^4\,dx$

7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

8) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^3}\,dx$

9) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

10) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

11) $\displaystyle\int_0^1 x^{3/2}\,dx$

12) $\displaystyle\int_1^2 x^{-2/3}\,dx$

2. Вычислите интегралы (логарифмы и экспоненты):

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$

2) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$

3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x}$

4) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$

5) $\displaystyle\int_0^2 e^x\,dx$

6) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^1 2^x\,dx$

8) $\displaystyle\int_0^2 3^x\,dx$

9) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$

10) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$

11) $\displaystyle\int_0^1 (e^x+e^{-x})\,dx$

12) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x}+e^x\right)dx$

3. Вычислите интегралы (тригонометрические функции):

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

5) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$

6) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

8) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$

9) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x+\cos x)\,dx$

10) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x-\cos x)\,dx$

11) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx$

12) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx$

4. Вычислите интегралы (линейная замена):

1) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 (3x-2)^2\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^2 (4x-1)^{-2}\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx$

5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{3x-2}}\,dx$

6) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x+1}\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x+1)\,dx$

8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(3x-1)\,dx$

9) $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x}+e^{-2x})\,dx$

10) $\int_0^{\pi/2} (\sin 2x + \cos 3x)\,dx$ 11) $\int_0^1 ((2x+1)^3 + e^{3x})\,dx$ 12) $\int_0^1 (\sqrt{3x+1} + \sin 2x)\,dx$

5. Вычислите интегралы (свойства определённого интеграла):

1) $\int_{-1}^1 x^3\,dx$ (чётность)

2) $\int_{-2}^2 x^4\,dx$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$

4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$

5) $\int_0^2 (x^2+2x)\,dx$

6) $\int_0^3 (x^2-4x+3)\,dx$

7) $\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x^2\,dx$

8) $\int_0^2 |x-1|\,dx$ (разбить на отрезки)

9) $\int_{-1}^1 |x|\,dx$

10) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$

11) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ (геометрический смысл)

12) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (полукруг)

Свойства определённого интеграла

Теория

В этой главе мы рассмотрим основные свойства определённого интеграла, которые часто помогают упростить вычисления.

Свойство 1. Линейность:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Свойство 2. Аддитивность:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

где c — любая точка между a и b.

Свойство 3. Перестановка пределов:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Свойство 4. Интеграл от чётной функции: Если $f(x)$ — чётная ($f(-x) = f(x)$), то:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Свойство 5. Интеграл от нечётной функции: Если $f(x)$ — нечётная ($f(-x) = -f(x)$), то:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$$

Свойство 6. Оценка интеграла: Если $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Свойство 7. Модуль интеграла:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Линейность

Вычислите интеграл, используя линейность:

$$\int_0^1 (x^2 + 2x)\,dx$$

По свойству линейности:

$$\int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 2x\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + 2\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + (1^2 - 0^2) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

Пример 2

Аддитивность

Вычислите интеграл:

$$\int_{-1}^1 |x|\,dx$$

Функция $|x|$ меняет своё выражение в точке $x = 0$. Разобьём интеграл на два:

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} (-x)\, dx + \int_{0}^{1} x\, dx = \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= (0 - (-\frac{1}{2})) + (\frac{1}{2} - 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Пример 3

Чётность и нечётность

Вычислите интегралы, используя свойства чётности:

$$\int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0 \quad \text{(нечётная функция)}$$

$$\int_{-2}^{2} x^4\, dx = 2\int_{0}^{2} x^4\, dx = 2\,\frac{x^5}{5}\Bigg|_{0}^{2} = 2 \cdot \frac{32}{5} = \frac{64}{5}$$

Пример 4

Интеграл от синуса на симметричном отрезке

Вычислите интеграл:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = 0 \quad \text{(нечётная функция)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos x\, dx = 2\,\sin x|_0^{\pi} = 2(0 - 0) = 0$$

Хотя косинус — чётная функция, сам интеграл на отрезке $[-\pi, \pi]$ равен нулю, потому что площадь над осью и под осью уравновешиваются.

Пример 5

Перестановка пределов

Вычислите интеграл:

$$\int_{1}^{0} x^2\, dx$$

По свойству перестановки пределов:

$$\int_{1}^{0} x^2\, dx = -\int_{0}^{1} x^2\, dx = -\frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{1} = -\frac{1}{3}$$

Пример 6

Оценка интеграла

Оцените интеграл:

$$\int_{0}^{1} e^x\, dx$$

На отрезке $[0, 1]$ функция e^x принимает значения от $e^0 = 1$ до $e^1 = e \approx 2.718$. По свойству оценки:

$$1 \cdot (1 - 0) \le \int_{0}^{1} e^x\, dx \le e \cdot (1 - 0)$$

$$1 \le \int_{0}^{1} e^x\, dx \le e$$

Точное значение $e - 1 \approx 1.718$ действительно попадает в этот интервал.

Пример 7

Модуль интеграла

Сравните:

$$\left|\int_{-1}^{1} x\,dx\right| = |0| = 0$$

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$$

Неравенство $\left|\int f\right| \le \int |f|$ выполняется.

Пример 8

Разбиение сложного интеграла

Вычислите интеграл с модулем:

$$\int_0^3 |x-2|\,dx$$

Функция $|x-2|$ меняет выражение в точке $x = 2$:

$$|x-2| = \begin{cases} 2-x, & 0 \le x \le 2 \\ x-2, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Разбиваем:

$$\int_0^3 |x-2|\,dx = \int_0^2 (2-x)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= (4-2) - (0-0) + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - (2-4) = 2 + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - (-2) = 2 + \left(\frac{9}{2} - 6\right) + 2 =$$

$$= 4 + \frac{9}{2} - 6 = -2 + \frac{9}{2} = \frac{-4+9}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

Задачи

1. Используя свойства линейности, вычислите интегралы:

1) $\int_0^1 (x^2 + x)\,dx$ **4)** $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)\,dx$ **7)** $\int_0^1 (2^x + 3^x)\,dx$

2) $\int_0^2 (x^3 - 2x)\,dx$ **5)** $\int_0^{\pi} (2\sin x - 3\cos x)\,dx$ **8)** $\int_0^1 (x^2 + e^x)\,dx$

3) $\int_1^2 (3x^2 + 2x - 1)\,dx$ **6)** $\int_0^1 (e^x + e^{-x})\,dx$ **9)** $\int_0^2 (x^3 + \sqrt{x})\,dx$

2. Используя аддитивность, вычислите интегралы:

1) $\int_{-1}^1 |x|\,dx$ **6)** $\int_{-2}^1 |x+1|\,dx$

2) $\int_0^2 |x-1|\,dx$ **7)** $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$

3) $\int_{-2}^2 |x+1|\,dx$ **8)** $\int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx$

4) $\int_0^3 |x-2|\,dx$ **9)** $\int_{-1}^1 \sqrt{|x|}\,dx$

5) $\int_{-1}^2 |x|\,dx$ **10)** $\int_{-2}^2 |x^2 - 1|\,dx$

3. Используя чётность и нечётность, вычислите интегралы:

1) $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$

2) $\int_{-2}^{2} x^5\,dx$

3) $\int_{-3}^{3} x^4\,dx$

4) $\int_{-2}^{2} x^6\,dx$

5) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$

6) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$

7) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

8) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

9) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$

10) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

11) $\int_{-1}^{1} xe^{x^2}\,dx$

12) $\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx$

4. Используя перестановку пределов, вычислите:

1) $\int_{1}^{0} x^2\,dx$

2) $\int_{2}^{1} x^3\,dx$

3) $\int_{\pi}^{0} \sin x\,dx$

4) $\int_{\pi/2}^{0} \cos x\,dx$

5) $\int_{0}^{-1} e^x\,dx$

6) $\int_{1}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$

5. Оцените интегралы:

1) $\int_{0}^{1} x^2\,dx$ (точное значение $\frac{1}{3}$)

2) $\int_{0}^{1} e^x\,dx$ (точное значение $e-1$)

3) $\int_{0}^{\pi/2} \sin x\,dx$ (точное значение 1)

4) $\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx$

5) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

6) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{1+x^3}$

6. Смешанные задачи на свойства:

1) $\int_{-2}^{2} (x^3+x^5)\,dx$

2) $\int_{-1}^{1} (x^4+x^2)\,dx$

3) $\int_{-1}^{1} (x^3+\cos x)\,dx$

4) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x+\cos x)\,dx$

5) $\int_{0}^{3} |x-1|\,dx + \int_{0}^{3} |x-2|\,dx$

6) $\int_{-1}^{2} |x|\,dx - \int_{-1}^{2} |x-1|\,dx$

7) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

8) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x \le 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Замена переменной в определённом интеграле

Теория

В этой главе мы научимся делать замену переменной в определённом интеграле. Главное отличие от неопределённого интеграла — при замене нужно пересчитывать пределы интегрирования.

Формула замены переменной:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

где $x = \varphi(t)$ — монотонная функция на отрезке $[a, b]$.

Или в другом направлении:

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

где $t = \varphi(x)$.

Алгоритм:

1. Делаем замену $t = \varphi(x)$ (или $x = \varphi(t)$)
2. Находим новые пределы: $t_1 = \varphi(a)$, $t_2 = \varphi(b)$
3. Выражаем всё через t и dt
4. Вычисляем полученный интеграл по новой переменной
5. Возвращаться к x не нужно — ответ уже число!

Важно! Если делаем замену $x = \varphi(t)$, то нужно выразить $dx = \varphi'(t)dt$ и подставить.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простая замена $t = 2x + 1$

Вычислите интеграл:

$$\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$$

Сделаем замену $t = 2x + 1$. Тогда:

- $dt = 2dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2}$
- Новые пределы: при $x = 0$: $t = 2 \cdot 0 + 1 = 1$; при $x = 1$: $t = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

Подставляем:

$$\int_0^1 (2x+1)^3\,dx = \int_1^3 t^3 \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_1^3 t^3\,dt = \frac{1}{2}\left.\frac{t^4}{4}\right|_1^3 = \frac{1}{8}(81-1) = \frac{80}{8} = 10$$

Пример 2

Замена $t = \sqrt{x}$

Вычислите интеграл:

$$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

Сделаем замену $t = \sqrt{x}$. Тогда:

- $x = t^2$, $dx = 2tdt$
- Новые пределы: при $x = 1$: $t = 1$; при $x = 4$: $t = 2$

Подставляем:

$$\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_1^2 \frac{t}{1+t}dt$$

Преобразуем дробь: $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$. Тогда:

$$2\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2\left(t\big|_1^2 - \ln|1+t|\big|_1^2 \right) = 2\left((2-1) - (\ln 3 - \ln 2)\right) = 2(1 - \ln\frac{3}{2}) = 2 - 2\ln\frac{3}{2}$$

Пример 3

Замена $t = e^x$

Вычислите интеграл:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$

Сделаем замену $t = e^x$. Тогда:

- $dt = e^x dx \Rightarrow e^x dx = dt$
- Новые пределы: при $x = 0$: $t = e^0 = 1$; при $x = 1$: $t = e^1 = e$

Подставляем:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\big|_1^e = \operatorname{arctg} e - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$$

Пример 4

Замена $x = \sin t$

Вычислите интеграл:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Сделаем замену $x = \sin t$. Тогда:

- $dx = \cos t\,dt$
- $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ (на отрезке $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ косинус неотрицателен)
- Новые пределы: при $x = 0$: $\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$; при $x = 1$: $\sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Подставляем:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$$

Используем формулу понижения степени: $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$. Тогда:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t\big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin 2t}{2}\bigg|_0^{\pi/2} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

Это площадь четверти круга радиуса 1, что и следовало ожидать.

Пример 5

Замена $t = \ln x$

Вычислите интеграл:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$$

Сделаем замену $t = \ln x$. Тогда:

- $dt = \frac{dx}{x}$
- Новые пределы: при $x = 1$: $t = 0$; при $x = e$: $t = 1$

Подставляем:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\ln x} = \int_0^1 \frac{dt}{t}$$

Но этот интеграл расходится! В точке $t = 0$ подынтегральная функция $\frac{1}{t}$ неограничена. Это пример несобственного интеграла, который мы пока не рассматриваем. Для корректного примера возьмём другие пределы.

Пример 6

Корректный пример с логарифмом

Вычислите интеграл:

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\ln x}$$

Замена $t = \ln x$:
- $dt = \dfrac{dx}{x}$
- Новые пределы: при $x = 2$: $t = \ln 2$; при $x = 3$: $t = \ln 3$

Подставляем:

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2) = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)$$

Пример 7

Замена в интеграле с чётностью

Вычислите интеграл:

$$\int_{-1}^1 xe^{x^2}\,dx$$

Можно заметить, что функция нечётная, поэтому интеграл равен 0. Но для проверки сделаем замену $t = x^2$:
- $dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \dfrac{dt}{2}$
- Новые пределы: при $x = -1$: $t = 1$; при $x = 1$: $t = 1$ (оба предела одинаковы!)

Получаем:

$$\int_{-1}^1 xe^{x^2}\,dx = \int_1^1 e^t \cdot \frac{dt}{2} = 0$$

что подтверждает результат.

Пример 8

Проверка дифференцированием

Результат примера 2 можно проверить дифференцированием первообразной, но проще поверить математикам.

Задачи

1. Вычислите интегралы с помощью линейной замены $t = ax + b$:

1) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$ **4)** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx$ **7)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x+1)\,dx$

2) $\displaystyle\int_0^1 (3x-1)^2\,dx$ **5)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$ **8)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(3x-1)\,dx$

3) $\displaystyle\int_1^2 (4x-3)^4\,dx$ **6)** $\displaystyle\int_0^1 e^{2x+1}\,dx$ **9)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^2}$

2. Вычислите интегралы с помощью замены $t = \sqrt{x}$:

1) $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

3) $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

4) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

5) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$

6) $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

7) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

8) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

3. Вычислите интегралы с помощью замены $t = e^x$:

1) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

2) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

3) $\int_0^1 \frac{e^x}{1-e^x}\,dx$

4) $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

5) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

6) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$

7) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

8) $\int_0^1 e^x \sin(e^x)\,dx$

4. Вычислите интегралы с помощью замены $t = \ln x$:

1) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$

2) $\int_2^3 \frac{dx}{x\ln x}$

3) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

4) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

5) $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

6) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

7) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^2 x}$

8) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

5. Вычислите интегралы с помощью тригонометрических замен:

1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

2) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

3) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

6) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

7) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

8) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

6. Смешанные задачи на замену:

1) $\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx$

2) $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx$

3) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,dx$

4) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$

5) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\,dx$

6) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

7) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$ (замена $t = x^2$)

8) $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

9) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x+2}$

10) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

11) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

12) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

Интегрирование по частям в определённом интеграле

Задачи

1. Вычислите интегралы (степень и экспонента):

1) $\int_0^1 xe^x\,dx$

2) $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$

3) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

4) $\int_0^1 x^2e^x\,dx$

5) $\int_0^1 x^2e^{2x}\,dx$

6) $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$

7) $\int_0^1 x^3e^x\,dx$

8) $\int_0^1 (2x+1)e^x\,dx$

9) $\int_0^1 (3x-2)e^{2x}\,dx$

2. Вычислите интегралы (степень и синус/косинус):

1) $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$

2) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

3) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

4) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

5) $\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$

6) $\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$

7) $\int_0^{\pi/4} x\sin 2x\,dx$

8) $\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\,dx$

9) $\int_0^{\pi/2} (2x+1)\sin x\,dx$

3. Вычислите интегралы (логарифмы):

1) $\int_1^e \ln x\,dx$

2) $\int_1^2 \ln x\,dx$

3) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$

4) $\int_1^e x\ln x\,dx$

5) $\int_1^2 x\ln x\,dx$

6) $\int_1^e x^2\ln x\,dx$

7) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

8) $\int_1^2 \ln(2x)\,dx$

9) $\int_1^e \ln(x^2)\,dx$

4. Вычислите интегралы (обратные тригонометрические):

1) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int_0^1 \arcsin x\,dx$

3) $\int_0^1 \arccos x\,dx$

4) $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$

5) $\int_0^1 x\arcsin x\,dx$

6) $\int_0^1 x\arccos x\,dx$

7) $\int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

8) $\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}\,dx$

9) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$

5. Вычислите интегралы (циклические):

1) $\int_0^{\pi/2} e^x\sin x\,dx$

2) $\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx$

3) $\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$

4) $\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$

5) $\int_0^1 e^x\sin x\,dx$

6) $\int_0^1 e^x \cos x \, dx$

7) $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x \, dx$

8) $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx$

9) $\int_0^{\pi/2} e^x \sin 2x \, dx$

10) $\int_0^{\pi/2} e^x \cos 2x \, dx$

11) $\int_0^1 e^x \sin(\ln x) \, dx$ — сложнее

12) $\int_0^1 e^x \cos(\ln x) \, dx$ — сложнее

6. Смешанные задачи на по частям:

1) $\int_0^1 xe^x \, dx + \int_0^1 xe^{-x} \, dx$

2) $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx - \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$

3) $\int_1^e \ln x \, dx \cdot \int_1^e \frac{dx}{x}$

4) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$

5) $\int_0^1 x^2 e^x \, dx - \int_0^1 xe^x \, dx$

6) $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx - \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$

7) $\int_0^1 (xe^x + x \ln x) \, dx$

8) $\int_0^{\pi/2} (x \sin x + x \cos x) \, dx$

Практика по блоку 7

Теория

В этом блоке мы изучили определённые интегралы и методы их вычисления:

- **Формула Ньютона-Лейбница:** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- **Свойства определённого интеграла:** линейность, аддитивность, чётность/нечётность, перестановка пределов
- **Замена переменной:** $\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
- **Интегрирование по частям:** $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$

В этой главе собраны задачи на все эти методы вперемешку.

Задачи

1. Вычислите интегралы по формуле Ньютона-Лейбница:

1) $\int_0^2 x^3\,dx$

2) $\int_1^3 \frac{dx}{x}$

3) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

4) $\int_0^1 e^x\,dx$

5) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

6) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$

7) $\int_0^1 2^x\,dx$

8) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

9) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

10) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

12) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$

2. Используя свойства определённого интеграла, вычислите:

1) $\int_{-1}^1 x^3\,dx$

2) $\int_{-2}^2 x^4\,dx$

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$

4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$

5) $\int_0^3 |x-1|\,dx$

6) $\int_{-1}^2 |x|\,dx$

7) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$

8) $\int_0^2 (x^2+2x)\,dx$

9) $\int_1^3 (x^2-4x+3)\,dx$

10) $\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x^2\,dx$

11) $\int_2^1 x^2\,dx$

12) $\int_{-1}^1 (x^3+x^5)\,dx$

3. Вычислите интегралы с помощью замены переменной:

1) $\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$

2) $\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx$

3) $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

4) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

5) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

6) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$

7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

9) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

10) $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx$

11) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x+2}$

12) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

4. Вычислите интегралы с помощью интегрирования по частям:

1) $\int_0^1 xe^x\,dx$

2) $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$

3) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

4) $\int_1^e \ln x\,dx$

5) $\int_0^1 x\ln x\,dx$

6) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$

7) $\int_0^1 \arcsin x\,dx$

8) $\int_0^{\pi/2} e^x\sin x\,dx$

9) $\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx$

10) $\int_0^1 x^2e^x\,dx$

11) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

12) $\int_1^e x\ln x\,dx$

5. Определите метод и вычислите интегралы:

1) $\int_0^2 (x^3-2x)\,dx$

2) $\int_{-1}^1 (x^4+x^2)\,dx$

3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4}$

4) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,dx$

5) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x}$

6) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$

7) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

8) $\int_0^2 |x-1|\,dx$

9) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

10) $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

11) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\sin x\,dx$

12) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-1}$

6. Смешанные задачи повышенной сложности:

1) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

2) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

5) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

6) $\displaystyle\int_1^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx$

8) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(1+x)\,dx$

9) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(1+x^2)\,dx$

10) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{x}\,dx$

11) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$

12) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$

Заключение

Вот мы и добрались до конца книги. Если вы дошли до этих строк и прорешали хотя бы часть задач — значит, вы проделали огромную работу. Поздравляю!

Интегралы — тема, которая многих пугает в начале изучения. Странный значок $\int$, непонятные методы, куча формул... Но теперь вы знаете, что интегралы — это просто обратная операция к дифференцированию, а все методы интегрирования логически вытекают из правил взятия производных.

В этой книге мы разобрали все основные приёмы интегрирования:

- начали с самого простого — таблицы основных интегралов;
- научились пользоваться свойствами линейности;
- освоили линейную замену для функций вида $ax + b$;
- перешли к подведению под знак дифференциала;
- разобрались с заменой переменной в общем случае;
- научились интегрировать по частям;
- разложили рациональные дроби на простейшие;
- выделяли полный квадрат и сводили интегралы к арктангенсу;
- познакомились с определённым интегралом и формулой Ньютона-Лейбница;
- изучили свойства определённого интеграла;
- научились делать замену и интегрировать по частям в определённом интеграле;
- и наконец, применили всё это для вычисления площадей и объёмов.

Но главное — мы научились главному: видеть, какой метод нужно применить в каждом конкретном случае. Потому что в реальных примерах никто не пишет «здесь нужна замена $t = \sqrt{x}$» или «примените интегрирование по частям». Вы просто видите интеграл и должны сами понять, как его вычислить. И чем больше у вас опыта, тем быстрее приходит это понимание.

Если какие-то темы остались непонятыми — не расстраивайтесь. Вернитесь к ним ещё раз, порешайте дополнительные задачи. Математика не терпит суеты, но она очень благодарна тем, кто проявляет терпение и настойчивость.

А если вам понравился такой формат — теория, примеры, много задач — у меня есть и другие книги. На сайте books.mrepetitor.com вы найдёте пособия по разным темам школьной и высшей математики, а также по физике.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я продолжаю преподавать математику и физику для школьников и студентов, готовлю к экзаменам, ОГЭ, ЕГЭ и ЦТ. Если чувствуете, что нужна помощь, или хотите подготовиться к экзаменам — обращайтесь!

Желаю вам успехов в учёбе, побольше интересных задач и удовольствия от их решения!

Дмитрий Трепачёв